Educación Básica

7

Educación Matemática

Programa de Estudio
Séptimo Año Básico

EDUCACION Nuestra Riqueza
GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACION

Educación Matemática

Programa de Estudio
Séptimo Año Básico / NB5

EDUCACION
Nuestra Riqueza

GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACION

Educación Matemática
Programa de Estudio Séptimo Año Básico / Nivel Básico 5
Educación Básica, Unidad de Curriculum y Evaluación
ISBN 956-7933-44-8
Registro de Propiedad Intelectual Nº 116.492
Ministerio de Educación, República de Chile
Alameda 1371, Santiago
Primera Edición 2000
Segunda Edición 2004

Santiago, octubre de 2000

Estimados profesores:

El presente programa de estudio de Séptimo Año Básico ha sido elaborado por la Unidad de Curriculum y Evaluación del Ministerio de Educación y aprobado por el Consejo Superior de Educación, para ser puesto en práctica, por los establecimientos que elijan aplicarlo, en el año escolar del 2001.

En sus objetivos, contenidos y actividades busca responder a un doble propósito: articular a lo largo del año una experiencia de aprendizaje acorde con las definiciones del marco curricular de Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica, definido en el Decreto Nº240, de junio de 1999, y ofrecer la mejor herramienta de apoyo a la profesora o profesor que hará posible su puesta en práctica.

Los nuevos programas para Séptimo Año Básico plantean objetivos de aprendizaje de mayor nivel que los del pasado, porque la vida futura, tanto a nivel de las personas como del país, establece mayores requerimientos formativos. A la vez, ofrecen descripciones detalladas de los caminos pedagógicos para llegar a estas metas más altas. Así, al igual que en el caso de los programas del nivel precedente, los correspondientes al 7º Año Básico incluyen numerosas actividades y ejemplos de trabajo con alumnos y alumnas, consistentes en experiencias concretas, realizables e íntimamente ligadas al logro de los aprendizajes esperados. Su multiplicidad busca enriquecer y abrir posibilidades, no recargar ni rigidizar; en múltiples puntos requieren que la profesora o el profesor discierna y opte por lo que es más adecuado al contexto, momento y características de sus alumnos y alumnas.

Los nuevos programas son una invitación a los docentes de 7º Año Básico para ejecutar una nueva obra, que sin su concurso no es realizable. Estos programas demandan cambios importantes en las prácticas docentes. Ello constituye un desafío grande, de preparación y estudio, de fe en la vocación formadora, y de rigor en la gradual puesta en práctica de lo nuevo. Lo que importa en el momento inicial es la aceptación del desafío y la confianza en los resultados del trabajo hecho con cariño y profesionalismo.

MARIANA AYLWIN OYARZUN
Ministra de Educación

Presentación

El presente programa se propone como la continuación de los procesos de construcción y adquisición de conocimientos matemáticos y de modos de pensar en este ámbito que las niñas y los niños necesitan hacer propios, utilizar y seguir desarrollando durante toda su vida, con el fin de enfrentar los desafíos que el creciente avance científico y tecnológico les plantean, y para una participación crítica, consciente e informada en la sociedad.

Con el fin de ampliar el acercamiento de niñas y niños a aspectos numéricos y geométricos de la realidad, iniciados en los programas de los niveles anteriores, se enfatiza un trabajo sobre el uso y el sentido de los números decimales en múltiples situaciones de la vida cotidiana, incorporando temas que los familiaricen con prácticas matemáticas del mundo adulto. Se amplía así el significado de las operaciones, el cálculo mental, la estimación y el cálculo aproximado. Se promueve, también, el uso de la calculadora tanto para resolver operaciones que requieren de cálculos (en ocasiones largos y tediosos, que pueden distraer la atención de aspectos centrales del problema que se desea resolver), como para facilitar la investigación de regularidades numéricas.

Se desarrollan en mayor profundidad nociones relacionadas con los números decimales, en particular, el significado de las cifras decimales en diferentes contextos. Se dedican actividades a la multiplicación y división con decimales, llamando la atención especialmente sobre el significado de dichas operaciones, más que sobre los algoritmos, y estableciendo relaciones con la multiplicación y la división de fracciones.

También en el ámbito de los números se introduce la expresión de cantidades utilizando la notación de potencias y, en particular, el significado tanto numérico como geométrico de las potencias cuadradas y cúbicas.

Un tema importante que se comienza a trabajar sistemáticamente en este programa son las relaciones proporcionales y no proporcionales entre magnitudes. En este nivel, lo central del trabajo está en establecer distinciones entre situaciones en las que existe variación proporcional (inversa o directa) y aquellas en que no existe. Se intenta dar una base para un tratamiento cada vez más amplio y profundo en niveles posteriores. La proporcionalidad está en la base de múltiples aspectos de las matemáticas que se incorporarán tanto en 8º como en la Enseñanza Media (por ejemplo, funciones lineales, ecuaciones de la recta, sistemas de ecuaciones, entre otros). El tratamiento del tema en este programa está íntimamente ligado con situaciones de la vida cotidiana y de las ciencias.

Se continúa el desarrollo del sentido espacial, el estudio de figuras y cuerpos geométricos y el análisis de las propiedades y relaciones geométricas que se pueden observar en diversas situaciones que están al alcance de niños y niñas (construcción, dibujo, manipulación) más que en sus definiciones y clasificaciones preestablecidas. Se propone, también, continuar con el trabajo relacionado con medición y cálculo de áreas y perímetros de figuras planas, en particular de triángulos, poniendo énfasis en los efectos que tienen en dichas magnitudes los cambios que se introducen en algunos elementos de las figuras. Por ejemplo, en los lados. De este modo, las actividades se desarrollan poniendo atención en familias de figuras más que en figuras aisladas.

Generalmente, es frente a la necesidad de resolver situaciones problemáticas donde los contenidos de aprendizaje adquieren sentido y se hacen necesarios. Es en esas circunstancias donde los niños y las niñas pueden percibir por qué y para qué aprenden y percibir la importancia de los conocimientos y la necesidad de construir otros nuevos. De este modo, los conocimientos nuevos se van construyendo sobre la base de los anteriores en contextos que les dan sentido.

En consecuencia, este programa, como los de niveles anteriores, propone la resolución de situaciones problemáticas como un medio fundamental para el aprendizaje de las matemáticas, la cual, combinada de manera pertinente con otro tipo de actividades de aprendizaje como juegos, debates, investigaciones, exposiciones (de docentes y estudiantes), ejercitaciones, etc., contribuyen a generar aprendizajes significativos y al desarrollo de la confianza en la propia capacidad para enfrentar con éxito nuevos desafíos cognitivos. El trabajo contextualizado permite desarrollar la capacidad de seleccionar métodos de cálculo adecuados y de evaluar resultados.

Una tarea central y permanente de las profesoras y los profesores es buscar y diseñar situaciones fecundas en preguntas y problemas que sean accesibles y de interés para las niñas y los niños. Los problemas y situaciones deben provenir de su vida cotidiana, de sus juegos, de lecturas e informaciones históricas o de actualidad que tengan sentido para ellos y de otras ramas del conocimiento (ciencias naturales y ciencias sociales, artes, tecnología, etc.).

En el programa se presenta un conjunto de **actividades** que es necesario que los niños y las niñas enfrenten para alcanzar los aprendizajes esperados, seguidos por **ejemplos** concretos que pueden ser desarrollados tal cual han sido diseñados; no obstante, cada vez que sea necesario los ejemplos deben ser adaptados o deben crearse otros nuevos. En esta tarea, es muy importante procurar que el conjunto de situaciones de aprendizaje propuestas den al alumnado múltiples oportunidades para:

- Explorar y probar estrategias diversas para resolver problemas.
- Desarrollar procesos ordenados y sistemáticos para la resolución de problemas o desafíos matemáticos.
- Sistematizar procedimientos y resultados.
- Comunicar procesos, resultados y conclusiones, incorporando, progresivamente, el uso de lenguaje matemático.
- Justificar, argumentar y fundamentar tanto resultados como procedimientos.
- Buscar y establecer regularidades y patrones, tanto en el ámbito de los números como del espacio y la geometría.
- Trabajar con materiales manipulables concretos y simbólicos.
- Desarrollar trabajos individuales y colectivos, en los que discutan tanto sobre procedimientos y resultados como sobre el sentido de las actividades.
- Proponer nuevas preguntas y problemas.
- Detectar y corregir sus errores.

Tanto por lo señalado como por las características de los niños y niñas de este nivel y de las condiciones reales en las que se desarrollan los procesos de enseñanza y aprendizaje, es muy importante que los docentes aborden el diseño de situaciones de aprendizaje con flexibilidad y propongan actividades variadas. Deberán tener en cuenta, también, que algunas actividades permiten enfatizar unas experiencias de aprendizaje más que otras. Así, por ejemplo, la resolución sistemática de un cierto tipo de problemas permite, a menudo, buscar y encontrar regularidades y sistematizar procedimientos; las investigaciones pueden permitir hacerse preguntas sobre problemas de la realidad y/o explorar estrategias diversas para proponer soluciones.

Finalmente, con el fin de dar sentido a los aprendizajes específicos de matemáticas, así como para contribuir a la formación de un pensamiento globalizador, es importante tener en cuenta en el diseño de las actividades de aprendizaje los desafíos que deben enfrentar los niños y niñas, en términos de contenidos, en otros subsectores de aprendizaje. Estos son, a menudo, no sólo oportunidades para aplicar conocimientos matemáticos sino que, los problemas que en ellos surgen son ilustraciones adecuadas de nociones matemáticas importantes.

Respecto de la evaluación, ésta es concebida como un proceso que está al servicio de la enseñanza y del aprendizaje. De este modo, en este programa se propicia tanto el acompañamiento y observación del desempeño de alumnos y alumnas durante las actividades como la observación al término de cada unidad, a partir de actividades expresamente sugeridas para ello. La orientación fundamental sobre el cómo evaluar está dada por el tipo de actividades que se propone durante el desarrollo de la unidad; y del qué evaluar, por los aprendizajes esperados.

Las actividades de aprendizaje abren espacios para la autoevaluación y coevaluación, donde las niñas y niños comparten procedimientos y resultados, discuten sobre ellos, sintetizan, pueden detectar y corregir errores. Del mismo modo, son instancias adecuadas para la evaluación por parte de la profesora o profesor, quien puede distinguir qué ayuda y qué obstaculiza a los niños y niñas en su proceso de aprendizaje con el fin de reflexionar en torno a esto, proponer caminos alternativos, elegir las formas de apoyo más adecuadas. Es importante que los docentes lleven algún registro de sus observaciones, carpetas donde se guardan los trabajos, por ejemplo, con el fin de apoyar sus decisiones de cambio de actividades, reforzamiento y apoyos individualizados.

Al finalizar cada una de las unidades se entregan ejemplos de actividades y problemas de evaluación que tienen el propósito de observar la consecución de los aprendizajes esperados definidos para cada una de ellas. Ellos ilustran el tipo de situación y problemas que podrían facilitar la obtención de información que permita orientar decisiones y también evaluar el logro. Estas actividades sugeridas están acompañadas por algunos indicadores que orientan respecto de qué observar en el desarrollo de cada una de ellas en relación con el o los aprendizajes esperados involucrados. Algunas de las actividades sugeridas pueden ser trabajadas en grupo y otras se prestan mejor para el trabajo individual. En general, podrían incorporarse en instancias especiales de evaluación, tales como pruebas.

Uno de los criterios para la definición de las formas que tome la evaluación es que ésta debe ser consecuente con el propósito de mejorar el aprendizaje. Si se evalúa, por ejemplo, sólo la repetición memorística de datos, de alguna manera se está reforzando la idea de que ese es el tipo de educación que se quiere promover; si se evalúan desempeños, capacidad de solucionar problemas, de manejar información, se está propiciando una educación flexible, abierta, con más sentido para quienes aprenden, con propósitos inmediatos (sirve para hoy) y de largo plazo (preparan para la vida adulta).

Objetivos Fundamentales Transversales y su presencia en el programa

Los Objetivos Fundamentales Transversales (OFT) definen finalidades generales de la educación referidas al desarrollo personal y la formación ética e intelectual de alumnos y alumnas. Su realización trasciende a un sector o subsector específico del currículum y tiene lugar en múltiples ámbitos o dimensiones de la experiencia escolar, que son responsabilidad del conjunto de la institución escolar, incluyendo, entre otros, el proyecto educativo y el tipo de disciplina que caracteriza a cada establecimiento, los estilos y tipos de prácticas docentes, las actividades ceremoniales y el ejemplo cotidiano de profesores y profesoras, administrativos y los propios estudiantes. Sin embargo, el ámbito privilegiado de realización de los OFT se encuentra en los contextos y actividades de aprendizaje que organiza cada sector y subsector, en función del logro de los aprendizajes esperados de cada una de sus unidades.

Desde la perspectiva señalada, cada sector o subsector de aprendizaje, en su propósito de contribuir a la formación para la vida, conjuga en un todo integrado e indisoluble el desarrollo intelectual con la formación ético-social de alumnos y alumnas. De esta forma se busca superar la separación que en ocasiones se establece entre la dimensión formativa y la instructiva. Los programas están construidos sobre la base de contenidos programáticos significativos que tienen una carga formativa muy importante, ya que en el proceso de adquisición de estos conocimientos y habilidades los estudiantes establecen jerarquías valóricas, formulan juicios morales, asumen posturas éticas y desarrollan compromisos sociales.

Los Objetivos Fundamentales Transversales definidos en el marco curricular nacional (Decreto Nº 240-99), corresponden a una explicitación ordenada de los propósitos formativos de la Educación Básica en tres ámbitos: *Formación Ética, Crecimiento y Autoafirmación Personal,* y *Persona y Entorno;* su realización, como se dijo, es responsabilidad de la institución escolar y la experiencia de aprendizaje y de vida que ésta ofrece en su conjunto a alumnos y alumnas. Desde la perspectiva de cada sector y subsector, esto significa que no hay límites respecto a qué OFT trabajar en el contexto específico de cada disciplina; las posibilidades formativas de todo contenido conceptual o actividad debieran considerarse abiertas a cualquier aspecto o dimensión de los OFT.

El presente programa de estudio ha sido definido incluyendo los Objetivos Transversales más afines con su objeto, los que han sido incorporados tanto a sus objetivos y contenidos, como a sus metodologías, actividades y sugerencias de evaluación. De este modo, los conceptos (o conocimientos), habilidades y actitudes que este programa se propone trabajar integran explícitamente gran parte de los OFT definidos en el marco curricular de la Educación Básica.

En el programa de Matemáticas de Séptimo Año Básico se refuerzan los OFT que tuvieron presencia y oportunidad de desarrollo durante el Quinto y Sexto Año y adiciona otros propio de las nuevas unidades. En este sentido, se incorporan:

- Los OFT del ámbito *Formación Ética* relacionados con los valores de autonomía y responsabilidad individual y colectiva frente a trabajos o tareas, y el respeto y valoración de las ideas y creencias diferentes a las propias, a través de actividades que inducen a selección de procedimientos frente a problemas, y discusión y evaluación grupal de su pertinencia.
- Los OFT vinculados al *Desarrollo de las Habilidades de Pensamiento* como son la exploración de estrategias cognitivas en la resolución de problemas,

la anticipación de resultados y la utilización de los sistemas y el instrumental de las matemáticas en la interpretación del mundo circundante, la recopilación, sistematización, interpretación, evaluación y comunicación de información y en la apropiación significativa de la realidad.

- Los OFT del ámbito *Crecimiento y Autoafirmación Personal*, en especial los relativos al interés en conocer la realidad, y habilidades de selección de información, uso del conocimiento, razonamiento metódico y reflexivo, y resolución de problemas. El programa plantea objetivos, contenidos y actividades que buscan desarrollar en alumnas y alumnos las capacidades de explorar diferentes estrategias para resolver problemas, sistematizar procedimientos, descubrir regularidades y patrones, organizar y analizar información cuantitativa, y justificar y comunicar eficazmente procedimientos y resultados, detectar y corregir errores, dando énfasis al trabajo metódico.
- Los OFT del ámbito *Persona y su Entorno* referidos al trabajo en equipo. A través de los problemas a resolver matemáticamente, que plantean las actividades del programa, es posible ampliar el trabajo de los OFT a la capacidad de juicio de alumnos y alumnas, y a la aplicación de criterios morales a problemas del medio ambiente, económicos y sociales y de la vida diaria.

Organización del programa

El Programa del NB5 ha sido organizado en 5 unidades. En cada una de ellas se señalan los aprendizajes esperados. En su conjunto, éstos aprendizajes esperados recogen y especifican los Objetivos Fundamentales que orientan el trabajo de todo el año escolar.

Se propone, también, una secuencia de las unidades. No obstante, los docentes pueden organizarlas a lo largo del año escolar en una secuencia diferente, aplicando criterios de flexibilidad y considerando las características del curso con el que trabajan. Sin embargo, se recomienda trabajar la unidad *Números decimales en la vida cotidiana* antes de la unidad *Relaciones de proporcionalidad,* aunque no necesariamente una inmediatamente después de la otra, lo mismo que la unidad *Geometría: prismas, pirámides y triángulos* antes que *Potencias en la geometría y en los números.* La unidad *Sistemas de numeración en la historia y actuales* puede ser desarrollada en cualquier momento del año.

El conjunto de las unidades que constituyen el programa se presentan en un cuadro sinóptico en el cual se describen brevemente los temas centrales de cada una de ellas y se señala el tiempo estimado para su desarrollo. El tiempo propuesto es, sobre todo, un indicador de la extensión de las unidades y deberá ser adaptado, cada vez que sea necesario, a la realidad específica de los cursos.

Finalmente, se presenta el desarrollo de cada una de las unidades, señalando:

- Los contenidos y los aprendizajes esperados.
- Una introducción breve con algunas definiciones y recomendaciones didácticas donde, además, se señalan los objetivos fundamentales abordados en la unidad.
- Un conjunto de actividades de aprendizaje acompañadas de comentarios pedagógicos y seguidas por ejemplos que permiten su contextualización.
- Sugerencias de actividades y problemas para la evaluación.

Objetivos Fundamentales

Los Objetivos Fundamentales correspondientes al 7º Año Básico y que constituyen las metas generales por alcanzar por todas las niñas y niños a lo largo del año escolar, determinados en el Decreto Nº240-99, son los siguientes.

1. Reconocer diferencias fundamentales entre el sistema de numeración y de medición decimal y otros sistemas de numeración y de medición.
2. Apreciar el valor instrumental de las matemáticas en la apropiación significativa de la realidad.
3. Atribuir y expresar el significado de grandes y pequeños números, utilizando diferentes recursos tanto gráficos como numéricos.
4. Anticipar resultados - aproximando y/o acotando - a partir del análisis de las características de los números involucrados en los problemas y de las condiciones de éstos.
5. Utilizar el razonamiento proporcional como estrategia para resolver problemas numéricos y geométricos.
6. Analizar familias de figuras geométricas para apreciar regularidades y simetrías y establecer criterios de clasificación.
7. Recolectar y analizar datos en situaciones del entorno local, regional y nacional y comunicar resultados; seleccionar formas de presentar la información y resultados de acuerdo a la situación.

Unidades, contenidos y distribución temporal

Cuadro sinóptico

Unidades		
1 **Números decimales en la vida cotidiana**	**2** **Geometría: prismas, pirámides y triángulos**	**3** **Sistemas de numeración en la historia y actuales**
Contenidos		
Números en la vida diaria • Interpretación y expresión de resultados de medidas, grandes y pequeñas, apoyándose en magnitudes diferentes (grandes cantidades de dinero en pesos y en UF, por ejemplo). **Multiplicación y división de números decimales** • Cálculo escrito, mental aproximado y con calculadora en situaciones problema. • Análisis de relaciones entre factores y producto y entre los términos de la división y el cuociente para establecer regularidades cuando intervienen cantidades menores que 1. **Tratamiento de información** • Análisis de información utilizando como indicador de dispersión el recorrido de la variable, y como medidas de tendencia central la moda, la media y la mediana. • Presentación de información en tablas. Análisis de información.	**Figuras y cuerpos geométricos** • Redes para armar prismas y pirámides. Armar cuerpos geométricos a partir de otros más pequeños. • Estudio de triángulos: características de sus lados y de sus ángulos. • Construcción de alturas y bisectrices en diversos tipos de triángulos. • Uso de instrumentos (regla, compás, escuadra), para la reproducción y creación de triángulos y en la investigación de las condiciones necesaria para dibujar un triángulo. **Perímetro y área** • Medición y cálculo de perímetros y de áreas de triángulos de diversos tipos en forma concreta, gráfica y numérica. • Investigación de las relaciones entre medidas de altura y base y el área correspondiente, en familias de triángulos generadas al mantener dichas medidas constantes.	• Comparación de la escritura de los números en el sistema decimal con la de otros sistemas de numeración en cuanto al valor posicional y a la base (por ejemplo, egipcio, romano, maya). • Comparación de la escritura de números, hasta 100, en base diez y en base dos (sistema binario).
Distribución temporal		
Tiempo estimado: 8-9 semanas	Tiempo estimado: 8-9 semanas	Tiempo estimado: 4-5 semanas

4	5
Relaciones de proporcionalidad	**Potencias en la geometría y en los números**
• Resolución de situaciones problemas, estableciendo razones entre partes de una colección u objeto y entre una parte y el todo. • Interpretación y uso de razones expresadas de diferentes maneras. • Resolución de problemas, elaborando tablas correspondientes a: - situaciones de variación no proporcional; - situaciones de variación proporcional directa e inversa. • Identificación y análisis de las diferentes razones y parejas de razones que se pueden establecer entre los datos de tablas correspondientes a variación proporcional directa e inversa. • Comparación de tablas correspondientes a situaciones de variación proporcional directa e inversa, para establecer diferencias. • Interpretación y expresión de porcentaje como proporciones y cálculo de porcentaje en situaciones cotidianas. • Presentación de información en tablas de frecuencias relativas y construcción de gráficos circulares. • Interpretación y expresión de resultados de medidas, grandes y pequeñas, apoyándose en magnitudes diferentes (una décima de segundo en la cantidad de metros que avanza un atleta en ese tiempo, por ejemplo).	**Potencias de base natural y exponente natural** • Interpretación de potencias de exponentes 2 y 3 como multiplicación iterada. • Asociación de las potencias de exponente 2 y 3 con representaciones en 2 y 3 dimensiones respectivamente (áreas y volúmenes). • Investigación de algunas regularidades y propiedades de las potencias de exponente 2 y 3. • Investigación sobre aplicaciones prácticas del teorema de Pitágoras.
Tiempo estimado: 10-11 semanas	Tiempo estimado: 5-6 semanas

Unidad 1

Números decimales en la vida cotidiana

TIEMPO ESTIMADO: 8-9 SEMANAS

Contenidos

Números en la vida diaria

- Interpretación y expresión de resultados de mediciones, grandes y pequeñas, apoyándose en magnitudes diferentes (grandes cantidades de dinero en UF, por ejemplo).

Multiplicación y división de números decimales

- Cálculo escrito, mental aproximado y con calculadora en situaciones problema.
- Análisis de relaciones entre factores y producto y entre los términos de la división y el cuociente para establecer regularidades cuando intervienen cantidades menores que 1.

Tratamiento de información

- Análisis de información utilizando como indicador de dispersión el recorrido de la variable, y como medidas de tendencia central la moda, la media y la mediana.
- Presentación de información en tablas.
- Análisis de información

Aprendizajes esperados

Las alumnas y los alumnos:

1. Comprenden e interpretan el significado de las cifras decimales en función de las unidades de medida utilizadas.
2. Utilizan cambios de unidades para evitar el uso de números con cifras decimales, cuando lo estimen conveniente en función de la comunicación de informaciones. Fundamentan sus decisiones.
3. Estiman resultados de multiplicaciones y divisiones con números decimales, en diferentes contextos. Realizan operaciones por escrito y con calculadora.
4. Utilizan de manera pertinente y razonable el redondeo de cifras decimales y evalúan la pertinencia de las aproximaciones en función de los contextos.
5. Utilizan indistintamente fracciones y decimales en el cálculo de multiplicaciones y divisiones por números menores que 1. Fundamentan las equivalencias.
6. Describen el comportamiento de grupos en relación con una variable determinada a partir del análisis de indicadores de tendencia central y de dispersión, simultáneamente: media, mediana, moda, dispersión. Determinan diferencias entre grupos.

Orientaciones didácticas

Esta unidad se propone como la continuación y profundización del tema de números decimales en la vida cotidiana trabajada en el nivel anterior (NB4). Del mismo modo que en esa ocasión, la base del trabajo lo constituye la resolución de problemas en situaciones muy ligadas a la vida cotidiana y a temas de otros subsectores, en particular, de Estudio y Comprensión de la Naturaleza y Estudio y Comprensión de la Sociedad.

Muchos de los problemas requieren de la medición de magnitudes y del uso de unidades del Sistema Internacional de Medidas, y de la lectura de informaciones en diarios y revistas en las que se utilizan números decimales para expresar cantidades.

Un aspecto importante de la unidad es la interpretación de las cifras decimales en diferentes contextos y referidas a unidades distintas. Por ejemplo, expresiones como 6,3 millones de habitantes, o un tiempo de 6,3 minutos. En ambos casos, es necesario comprender lo que representa la cifra decimal e interpretarla adecuadamente.

Por otra parte, y también en relación con situaciones cotidianas, se introduce la resolución e interpretación de aquellas en que se requiere la solución de multiplicaciones y divisiones. En estas operaciones, lo central está constituido por el desarrollo de habilidades de estimación, el trabajo con aproximaciones significativas y pertinentes, más que por los algoritmos habituales para operar.

Para la comprensión del sentido de estas operaciones con decimales, el trabajo se apoya en los conocimientos y prácticas con fracciones, abordado en el nivel anterior. En el caso de la multiplicación de números con cifras decimales, se parte por la interpretación tanto de los números involucrados como de la operación, con el fin de comprender cabalmente su sentido, para posteriormente incorporar un algoritmo que permite operar con ellos “como si fueran naturales” determinando las cifras decimales del resultado. En el caso de la división se recurre a la idea de amplificación, insistiendo en la equivalencia, en cuanto al resultado numérico de dividir, por ejemplo, 10 por 5 y 1 por 0,5. Finalmente, tanto la multiplicación como la división por números entre 0 y 1 se abordan, también, en estrecha relación con lo aprendido en el nivel anterior respecto de fracciones.

Con el fin de centrar el análisis y la comprensión en lo esencial, se recomienda el uso de una calculadora. En este contexto se aborda con especial cuidado la aproximación y redondeo, así como la interpretación del significado de las cifras decimales.

En el contexto del análisis sistemático de datos, se proponen, además, situaciones y problemas relacionados con un tema de interés para el alumnado, con el fin de extraer informaciones útiles para comprenderlas mejor y establecer conclusiones. Se introducen en el análisis indicadores estadísticos como la media, la mediana y la dispersión de los valores de una variable. En este sentido, se busca que puedan describir un grupo o una población en relación con una variable y que puedan, además, comparar grupos de manera cada vez más precisa. Por ejemplo, dos grupos pueden tener una media similar respecto de la edad y, sin embargo, tener una mayor dispersión de las edades, es decir, ser más o menos homogéneos.

Es muy importante continuar apoyando las aproximaciones de los niños y niñas a los diferentes temas con representaciones gráficas y concretas, al mismo tiempo que conducirlos a establecer conclusiones generales, por ejemplo, respecto de algunas regularidades que se pueden observar en el comportamiento de los números con decimales cuando se realizan operaciones con ellos.

Un aspecto que continúa siendo central en el trabajo es la comunicación de procedimientos y resultados; la discusión de ellos y de conclusiones obtenidas en el desarrollo sistemático de las actividades.

El uso e interpretación de cantidades con cifras decimales es parte importante, también, de la Unidad 4: Relaciones de proporcionalidad. Es por esta razón que se recomienda abordar la presente unidad antes que aquélla. En particular, en la Unidad 4, están presentes situaciones referidas a cambios de unidades (en mediciones de diferentes magnitudes).

Actividades de aprendizaje

Actividad 1

Analizan datos que presenten resultados de mediciones o de otro tipo expresados en números decimales para:

- **interpretar el valor que representa cada dato en su contexto;**
- **interpretar la parte decimal utilizando distintos referentes enteros;**
- **reflexionar sobre la relatividad que adquiere un valor numérico cuando se relaciona con otra unidad de medida y sus implicancias prácticas.**

Ejemplos

1. Leen y analizan la siguientes situaciones y realizan las actividades que se plantean.

a) *Federico dice que la biblioteca del colegio se encuentra a 5,7 km de su sala de clases y que él vive a 5,7 m de la escuela. Un compañero lo escucha se queda pensando y dice que eso es imposible.*

El compañero de Federico analizó la información entregada y llegó a una conclusión que lo hizo exclamar que era imposible ¿En qué análisis se podría haber basado el estudiante para decir que es imposible? ¿Están de acuerdo con la afirmación?

¿Qué significa el número 5 en cada caso?

¿Qué representa la cifra 7 en cada caso?

COMENTARIO

En ejemplos como este se persigue nada más que poner en evidencia la importancia de las unidades de medición y llamar la atención sobre ellas. En el caso de 5,7 metros, 5 se refiere a metros y 0,7 a décimos de metros (lo que equivale a 70 cm). Aunque las cifras son las mismas, el primer dato se refiere a metros y el segundo a kilómetros.

b) *En la Región Metropolitana hay aproximadamente 5,7 millones de habitantes en sectores urbanos. La Región de Aysén está constituida por 68,5 mil habitantes en las zonas urbanas, aproximadamente.*

- Leen e interpretan estos datos de población a partir de preguntas como:

  ¿Cuál de las dos regiones tiene mayor población urbana?

  ¿A cuántos habitantes representan el número entero 5 en el caso de la RM?

  ¿A cuántos habitantes representan los siete décimos en el caso de la RM?

  ¿A cuántos habitantes representan los 5 décimos en la población de Aysén?

- Buscan en informaciones de prensa, en libros o en internet datos sobre la población en diversas ciudades del país. Los analizan y confeccionan una tabla en la cual todos los datos se expresen utilizando una misma unidad (millones o miles). Fundamentan la elección de la unidad.

COMENTARIO

Es importante mostrar a los alumnos y alumnas algunos criterios que apoyen sus decisiones y que pueden estar referidos, por ejemplo, a facilitar la lectura e interpretación de ellas, a la economía de espacio en tablas; a la mayor facilidad para comparar, etc. Estos criterios pueden ser determinados por los propios estudiantes al analizar informaciones y preguntarse por qué está dada de determinada manera y no de otra. En los periódicos suele usarse números decimales para indicar grandes cantidades (presupuestos del país, población en diferentes países, etc.), considerando diferentes unidades.

- Escriben los datos de manera extensa (por ejemplo, 5,7 millones como 5.700.000).
- Escriben algunas conclusiones que relacionen el significado de la parte decimal (lo que representa) con la unidad utilizada (en este caso, la unidad utilizada es millones).

COMENTARIO

También se puede trabajar con datos que representen resultados de mediciones muy pequeñas para abordar con mayor propiedad la elección de la unidad más apropiada. Por ejemplo, expresar 0,1 cm en milímetros suele ser más comunicativo (1 mm).

A veces es posible recurrir a la equivalencia con otras unidades para evitar el uso de decimales. Sin embargo, esto es relativo puesto que, por ejemplo, en medidas tan pequeñas como 0,0001 mm es conveniente que la unidad de medida se conserve debido a que el milímetro es la unidad más pequeña que tiene un significado cercano para las personas (parece difícil imaginar un micrón u otra más pequeña).

En ambos ejemplos, las conclusiones van orientadas hacia la reflexión de la relatividad de expresiones numéricas iguales cuando la unidad (referente) varía.

2. Leen y comentan la siguiente información.

En una de las carreras realizadas durante una competencia deportiva, la diferencia entre el competidor que llegó en primer lugar y el que alcanzó el segundo puesto fue de 2,3 segundos. En cambio, la diferencia entre el primero y el último atleta en llegar a la meta fue de 2,3 minutos.

- Interpretan la información a partir de preguntas como:
  ¿Qué representa la parte entera del número decimal en cada caso?
  ¿Qué representa la cifra decimal en cada uno de los casos?
  ¿A cuántos segundos corresponden 3 décimas de minuto?
  ¿Cómo se podría expresar 2,3 minutos en segundos?
  ¿Cómo se podría representar o explicar lo que significa un tiempo de “3 décimas de segundo”?

COMENTARIO

Recordar que las unidades de tiempo varían de 60 en 60 pero esto es válido sólo en relación a las horas con los minutos y los minutos con los segundos; en cambio para indicar mediciones de tiempo menores a un segundo se utiliza décimas y centésimas de segundo.

En el ejemplo 2,3 minutos corresponden a 2 minutos y $\frac{3}{10}$ de un minuto, es decir, a 2 minutos y 18 segundos.

En el curso anterior abordaron la interpretación de las cifras decimales en el caso de unidades de tiempo.

Para explicar o representar 2,3 segundos se pueden hacer algunos ejercicios prácticos como, por ejemplo, caminar durante ese tiempo y ver cuánto se avanza. También se puede correr, o ver cuánto se alcanza a leer de una página escrita. Lo importante es que perciban que es un tiempo breve (mucho más breve que 2,3 minutos) pero que, en el caso de una carrera, por ejemplo, puede representar mucho (en distancia).

Un sitio de internet que se puede usar como recurso educativo es *http://roble.pntic.mec.es/~jcamara/decimal.htm*. Refuerza los conocimientos de forma gráfica e intuitiva e incluye modelos visuales para facilitar la comprensión de los números decimales.

Actividad 2

Resuelven situaciones que impliquen multiplicar números decimales utilizando procedimientos que se basan en descomposiciones aditivas de los números y en transformaciones a fracciones decimales.

Ejemplos

1. **Leen y comentan la siguiente situación y realizan las actividades que se señalan.**

En la clase de Estudio y Comprensión del Medio Natural, María observó en el microscopio una hormiga. A ella le interesaba investigar las patas de las hormigas. Específicamente deseaba saber si estos insectos tienen pelos, algún tipo de dedos, talones o algo parecido a otros animales.
Para responder a sus interrogantes utilizó el microscopio con el fin de ampliar el tamaño de este insecto y observar las patas y otros detalles que no era posible distinguir a simple vista. En primer lugar, aumentó el tamaño (el largo) de la hormiga al doble, luego al triple y, finalmente, al cuádruple.

- Buscan estrategias para responder a las preguntas siguientes:
  Si la hormiga de María mide de largo aproximadamente 0,4 cm. ¿Cuál era la longitud cuando se amplió al doble?, ¿al triple?, ¿al cuádruple?
  Al observar solamente las patas de la hormiga, María se dio cuenta de que ampliar al triple no era suficiente, pero ampliar al cuádruple era demasiado. Entonces, decidió ampliar la hormiga 3,5 veces su tamaño.
  ¿De qué longitud (largo) se veía la hormiga luego de la ampliación?

- Explican el procedimiento que utilizaron para obtener el resultado.
- Discuten y evalúan procedimientos de cálculo como los siguientes:
  Multiplicar 0,4 por 3,5 es lo mismo que decir "Tres veces 0,4 más la mitad de 0,4."
  Multiplicar 0,4 por 3,5 es lo mismo que decir "Cuatro veces 0,4 menos la mitad de 0,4."
  Multiplicar 0,4 por 3,5 es lo mismo que $\frac{4}{10} \times \frac{35}{10}$
- ¿De qué largo se ve la hormiga si su tamaño se amplía 3,8 veces? ¿Y 3,2 veces?
- Resumen diferentes procedimientos para resolver multiplicaciones con números decimales.

COMENTARIO

Es muy probable que los alumnos y alumnas utilicen la técnica de suma iterada para responder a algunas de las preguntas. Sin embargo, es importante que tomen conciencia de que ese procedimiento es insuficiente para responder otras preguntas (por ejemplo aquella referida a 3,5). En este caso, es muy importante centrar la atención en el significado de expresiones comunes como "tres veces y media" o "tres coma cinco veces."

La expresión de los números decimales como fracciones decimales permite recoger el trabajo realizado en NB4 con la multiplicación de fracciones decimales, con el sentido que tiene como operador de una fracción ("una parte de otra"). Una opción que parece adecuada para introducir el algoritmo tradicional de la multiplicación es apoyarse en las fracciones decimales, lo cual lo justifica y se sustenta en el trabajo de años anteriores. Sin embargo existen otros acercamientos a la multiplicación y la división con números decimales; una de ellas es abordar directamente el algoritmo tradicional operando con los números como si fueran naturales (omitiendo la coma) y luego ubicar la coma siguiendo una regla establecida. Otra alternativa se fundamenta en la noción de número decimal como extensión del sistema de numeración decimal posicional a unidades más pequeñas que 1. En el caso de la multiplicación y división se recurre a una descomposición de los números para encontrar el resultado a través de la aplicación de la propiedad distributiva de los naturales. En el ejemplo que se presenta a continuación, las abreviaciones significan posiciones del sistema decimal, entonces d son décimos; c son centésimos; m son milésimos y cd corresponde a la multiplicación de décimos por centésimos.

5,23 x 9,8

(5 + 2d + 3c) • (9 + 8d)	*multiplicando término por término:*
45 + 40d +18d +16c + 27c + 24m	*agrupando se obtiene*
45 + 40d +18d + 43c + 24m	*este resultado escrito como número decimal es*
45 + 4 + 1,8 + 0,43 + 0,024 = 51,254	

Estos tres enfoques no son antagónicos sino más bien complementarios y aportan, en su conjunto, una visión más completa de los números decimales y sus operaciones.

2. Leen y comentan la siguiente situación.

La señora Juana, dueña del negocio del barrio, tiene la siguiente tabla para el precio del queso y del pan:

Queso	Precio
0,125 kg ó $\frac{1}{8}$ kg ó 125 gr	\$ 325
0,250 kg ó $\frac{1}{4}$ kg ó 250 gr	\$ 650
0,500 kg ó $\frac{1}{2}$ kg ó 500 gr	\$ 1.300
0,750 kg ó $\frac{3}{4}$ kg ó 750 gr	\$ 1.950
1 kilo ó 1.000 gr	\$ 2.600

Pan	Precio
1 kg ó 1.000 gr	\$ 540
1,250 kg ó $1\frac{1}{4}$ kg ó 1.250 gr	\$ 675
1,500 kg ó $1\frac{1}{2}$ kg ó 1.500 gr	\$ 810
1,750 kg ó $1\frac{3}{4}$ kg ó 1.750 gr	\$ 945
2 kilo ó 1.000 gr	\$ 1.080

- Imaginan y desarrollan al menos un procedimiento que podría haber utilizado la señora Juana para confeccionar la tabla de precios del queso y del pan.
- Completan la tabla con otro valores:
  ¿Cómo se podría calcular cuánto cuesta 0,650 kg, 450 gramos y 0,625 kg de queso?
  ¿Cuánto cuestan 2,5 kg de pan? y ¿0,5 kg de pan?
- Explican sus procedimientos para resolver las operaciones involucradas. Comparan los procedimientos con otras personas y/o grupos.

COMENTARIO

Se trata de permitir a los alumnos y alumnas explorar, imaginar y determinar procedimientos sin imponer, a priori, alguno que sea considerado más simple o más directo. Una vez que han explorado, resuelto, y contrastado sus maneras de proceder con otras diferentes, podrán evaluar y decidir cuál o cuáles les parecen más interesantes, claros, etc.

En este ejemplo, en la tabla se presenta la información expresada con fracciones para apoyar la relación con la multiplicación de fracciones.

Otros ejemplos se pueden realizar con boletas de supermercado cuando se han comprado productos que se pesan en una balanza electrónica, pues aparece la multiplicación del peso del paquete por el precio del kilo del producto.

El siguiente problema se puede emplear para observar el aprendizaje de las alumnas y alumnos:

Hay 4 bloques grandes y dos pequeños. Los bloques de igual tamaño pesan lo mismo. El peso de un bloque grande es el mismo que dos de los pequeños. Todos los bloques juntos pesan 7,5 kg. ¿Cuánto pesa el bloque más grande?

Actividad 3

Interpretan multiplicaciones con números decimales cuando uno de los factores o ambos son menores que 1. Anticipan si el producto será mayor, menor o igual que cada uno de los factores.

Ejemplo

Organizados en parejas realizan las siguientes actividades.

a) Trabajan con la calculadora, siguen la secuencia y completan las siguientes tablas:

0,3 x 4		0,5 x 25		7,3 x 1.000		2,1 x 1.000	
0,3 x 2		0,5 x 5		7,3 x 250		2,1 x 100	
0,3 x 1		0,5 x 1		7,3 x 1		2,1 x 10	
0,3 x 0,5		0,5 x 0,2		7,3 x 0,250		2,1 x 1	
0,3 x 0,25		0,5 x 0,04		7,3 x 0,125		2,1 x 0,1	

- Observan las tablas y establecen conclusiones en relación con los resultados a partir de preguntas como:
- ¿Por qué el valor de los productos de cada tabla van disminuyendo? Explica tu conjetura.
  Comparan el producto obtenido con uno de los dos factores y también con ambos factores, establecen conclusiones y constatan su validez resolviendo con la calculadora.
- Comparten las conclusiones con el curso.

COMENTARIOS

Esta actividad se centra en observar el carácter singular que adquiere la multiplicación con números decimales cuando al menos uno de los factores, es menor a 1. Por ello las tablas comienzan con un número natural que va disminuyendo y, por lo tanto, su producto también va disminuyendo en relación al factor natural.

Del análisis anterior se espera que los niños y niñas puedan expresar con sus propias palabras conclusiones que comuniquen la idea que si se multiplica un número decimal menor a 1 por un número natural, el producto es mayor que el decimal y menor que el natural.

Y, por otra parte, que en las multiplicaciones en que ambos factores son decimales menores a 1, el producto es menor a ambos factores. Es importante dejar de manifiesto la importancia del factor 1, pues marca el límite entre uno u otro efecto.

- Trabajando con tablas como las siguientes, y apoyándose en los análisis anteriores, anticipan el rango entre los que se encuentran los productos. Usan expresiones como: “más que y menos que” o “entre” o “menor que pero mayor que cero.”

0,01 x 0,5		0,8 x 0,250	
2 x 0,6		0,250 x 24	
0,6 x 4,4		16 x 0,125	
9,8 x 0,6		1,6 x 0,125	
0,1 x 0,45		0,2 x 10	
200 x 0,9		2,5 x 0,2	
5,01 x 1,1		0,3 x 20	
0,4 x 1,2		0,1 x 30	

- Comprueban con la calculadora si sus anticipaciones fueron correctas.
- Comparten las estrategias usadas para ubicar los rangos entre los cuales ubicaron el producto. Enriquecen las conclusiones establecidas anteriormente.

COMENTARIO

En la primera tabla la intención es asociar el factor 0,5 con “la mitad de,” por lo tanto, al preguntarse por el producto en que un factor es cercano a 0,5 (por ejemplo, 0,6 ó 0,45), es posible asociarlo a “un poco menos de la mitad” o “un poco más de la mitad.” Del mismo modo, en las multiplicaciones que tienen un factor cercano a 1, el producto es aproximadamente “un poco menos (o un poco más) de una vez el otro factor “ o “un poco menos (un poco más) que el otro factor.” En el caso específico de multiplicar por 0,9 o por 1,1 los resultados serían un décimo menos que el otro factor y un décimo más que el otro factor, respectivamente.

En la segunda tabla, la asociación es análoga pero con aproximaciones asociadas a la cuarta, la quinta, la octava y décima parte (multiplicaciones con factores 0,25; 0,2; 0,125 y 0,1 respectivamente y factores cercanos a los anteriores).

Es importante que se realice una síntesis a partir de estos análisis y de las estrategias que las alumnas y alumnos puedan aportar. Esta actividad está estrechamente ligada a la estimación de productos, la cual se abordará mas adelante poniendo énfasis en el redondeo de las cantidades involucradas.

b) Trabajan con dos conjuntos de tarjetas: unas contienen preguntas que implican una multiplicación de decimales y otras contienen multiplicaciones.

- Parean las tarjetas que contienen expresiones verbales con la correspondiente operación aritmética y escriben entre qué números se puede encontrar el resultado.
- Inventan otras expresiones verbales que impliquen una multiplicación con decimales y su respectiva operación y las escriben en tarjetas.
- Intercambian las tarjetas creadas con otra pareja de compañeros o compañeras, los que tienen que parearlas y escribir entre qué números se puede encontrar la respuesta.

COMENTARIO

A continuación se presentan algunos ejemplos para confeccionar las tarjetas:

¿Cuánto es la décima parte de un centímetro?

Dos décimas de 8,6 millones de pesos son...

Cuatro centésimas de la población chilena (estimada en 15 millones) es analfabeta. ¿A cuántas personas analfabetas corresponde esta cantidad?

15 millones x 0,04 =

0,1 m x 0,1 =

0,01 m x 0,1 =

300.000 x 0,45 =

El diámetro de la luna corresponde a veinticinco centésimas del diámetro de la tierra, y este mide, aproximadamente, 12.756 km.
El diámetro de la luna mide aproximadamente ....km.

“Cuarenta y cinco centésimas de la población de Estados Unidos y Canadá (estimada en 300 millones de personas) están conectadas a internet.
¿Cuántas personas están conectadas a Internet?

300 x 0,45 =

15 millones x 0,4 =

8,6 millones x 0,2 =

12.756 x 0,25 =

Actividad 4

Realizan actividades que les permitan poner en juego las conclusiones relativas a la multiplicación con números decimales.

Ejemplo

Juegan con la calculadora a encontrar una multiplicación (de dos factores) cuyo resultado se encuentre entre ciertos rangos establecidos.

a) Se desafían en parejas a encontrar un número “entre 100 y 105”, siguiendo las instrucciones del juego. Comentan las estrategias y dificultades para alcanzar la meta.

Instrucciones del juego
Escogen un número de inicio menor a 100 y lo escriben en la pantalla de la calculadora. Por turno van multiplicando el número que aparece en la pantalla por otro número a elección del jugador o jugadora. El primero que logre mostrar en la pantalla de la calculadora un resultado que se encuentre entre 100 y 105 gana el juego.

- Juegan nuevamente variando el número de inicio, incluso a números mayores a 100.
- Antes de comenzar a jugar, cada grupo discute las estrategias que se pueden utilizar para ganar el juego, comentan situaciones concretas y cuáles son los números por los que conviene multiplicar en esos casos.
- Desarrollan la competencia.

b) Se desafían en parejas a encontrar un número “entre 100 y 101”, siguiendo las instrucciones del juego. Toman como referencia las estrategias ganadoras utilizadas en el juego anterior. Comentan las estrategias y dificultades para alcanzar la meta.

- Desarrollan la competencia.
- Establecen conclusiones en relación a las estrategias ganadoras.

COMENTARIO

Es recomendable practicar este juego varias veces con el objetivo de facilitar la búsqueda de estrategias de estimación de productos.

En general los alumnos y las alumnas creen que si aparece en la pantalla un número mayor a 105 o 101, en el primer y segundo juego respectivamente, no es posible seguir jugando, por lo que se les debe incentivar en la búsqueda de posibilidades para reducir este número y ganar el juego. Por lo tanto, este juego permite reforzar la visión de la multiplicación como una ampliación y como una reducción, dependiendo del valor del factor que se utilice.

Las conclusiones establecidas al completar tablas con la calculadora ayudan a anticipar el rango en que se encuentra el producto.

Para buscar una estrategia ganadora es interesante recurrir a la relación entre fracciones y decimales. Por ejemplo:

- Si se desea obtener un número que sea un décimo del número que aparece en la pantalla de la calculadora, se puede multiplicar por 0,1. Así, si en la pantalla aparece 1.000, al multiplicar por 0,1 se obtiene 100.
- Si se desea obtener un número que sea un quinto del número que aparece en la pantalla de la calculadora, se puede multiplicar por 0,2.
- Si se desea obtener un número que sea un cuarto del número que aparece en la pantalla de la calculadora, se multiplica por 0,25.
- Si se desea obtener un número que sea mayor que el que aparece en la pantalla, se multiplica por un número mayor a 1. Por ejemplo, si se tiene en la pantalla 100, se multiplica por 1,001.

Esta actividad se centra en la búsqueda de estrategias que ayudan a sintetizar conclusiones obtenidas en el trabajo con multiplicaciones de números decimales y en abrir espacios para compartir y discutir estrategias diversas. Si los alumnos y alumnas no logran elaborar una estrategia es muy importante animarlos para que sigan investigando.

Un ejemplo de estrategia ganadora es la siguiente:

Número que aparece en la pantalla $\boxed{120}$ y se quiere obtener un resultado entre 100 y 105

se digita x 0.85 =

(El 0,85 se puede obtener de dividir 102 por 120. El número 102 permite ganar pues se ubica entre 100 y 105).

Para el caso en que la meta sea entre 100 y 101 se utiliza una estrategia análoga.

Actividad 5

Resuelven situaciones de reparto equitativo y de medición para:

- **analizar lo que representa el resto en una división cuando corresponda, decidiendo los casos en que tiene sentido obtener resultados y/o restos decimales;**
- **evaluar que los resultados y las respuestas sean razonables.**

Ejemplos

1. En grupo leen, analizan y resuelven las siguientes situaciones. Presentan sus soluciones al curso.

a) *El Departamento de Bienestar de una empresa decidió comprar a precio rebajado sacos de legumbres para el invierno y repartirlas en partes iguales a sus asociados. Este año compraron 100 kg los cuales repartirán entre sus 40 socios.* ¿Cuánto recibe cada trabajador y trabajadora?

- Algunos grupos buscan la respuesta al reparto usando calculadora y otros grupos lo resuelven usando lápiz y papel, según como se haya establecido previamente.
- Comparan el resultado del reparto entre las operaciones realizadas con calculadora y las realizadas sin ella. Explican el significado de la cifra decimal.

COMENTARIO

Es probable que algunos alumnos o alumnas que resolvieron con lápiz y papel hayan hecho una división sin obtener decimales (es decir, con resultado 2 y resto 20); que otros hayan obtenido decimales, y otros hayan encontrado el resultado del reparto a través de algún procedimiento diferente (buscar un número que multiplicado por 40 dé 100, por ejemplo). Según eso, es importante llevarlos a la división y mostrar cómo proceder para seguir dividiendo el resto. De este modo, podrán llegar al mismo resultado que con la calculadora.

- Analizan sus procedimientos para dividir hasta no tener resto guiados por preguntas como las siguientes:
  Antes de obtener decimales en el resultado ¿qué representa el resto igual a 20?
  El procedimiento utilizado para dividir 100 por 40 (hasta obtener resto igual a cero), ¿sirve si se consideran, por ejemplo, 16 trabajadores o 32 ó 64? ¿Qué pasaría si fueran 35?
- Resuelven con la calculadora e interpretan las cifras decimales considerando si es pertinente o no el resultado (es decir, si es realizable el reparto según ese resultado). Determinan cuántos kilos de legumbres recibiría cada persona si fueran 35 los asociados.
- Presentan los procedimientos y establecen conclusiones en torno a una forma eficiente de repartir el resto y al análisis de la cantidad de cifras decimales que es pertinente obtener en cada división. Esto último corresponde a preguntarse: ¿Hasta cuándo es pertinente repartir el resto en este caso? ¿Por qué?

COMENTARIO

En la primera parte de la actividad se pide contrastar el resultado que se obtiene con la calculadora con el escrito, si bien el centro es observar el reparto del resto, también puede ser un buen momento para trabajar con la calculadora en situaciones que impliquen dividir e interpretar las cifras decimales que aparecen en la pantalla.

Este es también un momento adecuado para introducir el algoritmo habitual de repartición del resto (obtener decimales en una división de números naturales) basándose en las equivalencias de unidades. En esta situación, por ejemplo, en el primer reparto 100 : 40 = 2
20

se puede recurrir a la relación entre el 20 kg y el 40 personas para concluir que a cada uno le corresponde la mitad de un kilo. Por otra parte, 20 kg equivalen a 20.000 gr que si se dividen entre los 40 personas dará 500 gr. En este caso, al cambiar de unidades hay que tener cuidado en cómo se entrega la respuesta, que sería 2 kilos y 500 gr.

Otro aspecto importante de la actividad es llevar a los niños y niñas a reflexionar sobre la pertinencia de repartir el resto en una división. En el caso de la repartición a 35 trabajadores y trabajadoras, el resultado obtenido es 2,8571428571... kg por persona, lo que no parece posible de repartir en forma concreta. Se hace evidente la necesidad de hacer una aproximación. Es interesante que se enfrenten a la necesidad de decidir hasta cuándo conviene, de acuerdo con la situación, continuar con la repartición del resto. Tal vez, en algunos casos (dependiendo de la unidad de la medida empleada) sea pertinente obtener un resultado que contemple más cifras decimales.

Un contexto cercano a la experiencia de alumnas y alumnos y con un gran potencial de reflexión sobre la conveniencia del uso de los números decimales en el resultado de una división es el dinero: repartos de dinero entre varias personas, pago de compras en tres cuotas, entre número de cuotas de préstamos bancarios, etc. debido a que en el sistema chileno no existen monedas para fracciones de $1.

b) Se cuenta con una trozo de cartulina que mide 30 cm de largo por 2 cm de ancho. Se desea confeccionar fichas de 2,5 cm de largo por 2 cm de ancho cada una.
¿Cuántas tarjetas del tamaño indicado se pueden obtener si se utiliza al máximo la cartulina?

- Determinan al menos dos procedimientos diferentes para encontrar la respuesta. Confirman su resultado haciendo las divisiones con una calculadora.

- Analizan el siguiente procedimiento en el cual se utiliza un cambio de unidades:
30 cm : 2,5 cm es equivalente a calcular 300 mm : 25 mm =

COMENTARIO

Al demandar al menos dos procedimientos se pretende que puedan verificar uno con el otro. Por ejemplo, si resuelven gráficamente verán que son 12 tarjetas. Eso permite comprobar el resultado de una división (30 : 2,5 = 12). Para algunos niños o niñas, la resolución gráfica o concreta puede aportar mayor significado a la división. También se puede usar como apoyo una regla o un metro. En ambos casos, la unidad de medida usada es muy importante para la interpretación de la situación y del cuociente.

Es esperable que las alumnas y alumnos recurran a procedimientos intuitivos como, por ejemplo, que interpreten 2,5 como 2 y medio centímetro y digan: en 5 cm de largo hay 2 tarjetas, en 10 cm hay 4 tarjetas y en 30 cm hay 12 tarjetas.

Otro procedimiento es recurrir a las fracciones decimales.

El procedimiento sobre el cambio de unidades tiene la intención de enriquecer las estrategias usadas por el alumnado y de prepararlo para abordar en la actividad siguiente divisiones de decimales con cantidades que no tienen un sustento intuitivo como el 2,5. Tiene como objetivo, además, facilitar la comprensión del algoritmo tradicional basado en la amplificación (que se sugiere introducir en la actividad que sigue).

Otra forma para dar significado al resto y reforzar la comprensión del algoritmo es realizar una división de natural por natural con la calculadora y tratar de explicar la parte decimal del cuociente a través de la reconstitución del algoritmo. Por ejemplo: 104 : 40 = 2,6 se sabe que 2 x 40 = 80 y 104 - 80 es 24.

Los “6 décimos” se obtienen al dividir 24 por 40 en efecto, 6 x 4 = 24.

- Repiten la actividad considerando otras medidas para las tarjetas como para la tira de cartulina, señalando cuándo se ocupa enteramente la cartulina y cuándo sobra un trozo. Registran sus respuestas en una tabla como la siguiente y comprueban sus resultados con la calculadora.

Medidas de las fichas		**Medidas de la tira de cartulina**		**Cantidad de fichas que se obtienen**
largo	**ancho**	**largo**	**ancho**	
2,5 cm	2 cm	30 cm	2 cm	
2,5 cm	2 cm	32,5 cm	2 cm	
4 cm	2 cm	31,5 cm	2 cm	
4,5 cm	2 cm	31,5 cm	2 cm	
4,5 cm	2 cm	32 cm	2 cm	

- Cada grupo explica los procedimientos que utilizaron para encontrar las respuestas.
- En cada caso, interpretan el cuociente y el resto (si lo hay). Deciden hasta cuándo es pertinente seguir dividiendo el resto, es decir, con cuánta precisión -expresada en cifras decimales- dividirán las tiras de cartulina.
- Establecen conclusiones en torno a una forma eficiente de encontrar el cuociente.

COMENTARIO

Es muy habitual que se enseñe a dividir por números decimales de manera muy mecánica ("se agregan tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor," suele decirse) sin que se puedan comprender claramente la razón de dicha equivalencia. Utilizar unidades de medida y sus equivalencias, como en el ejemplo, es un sustento para la comprensión del algoritmo y facilita la introducción de la estrategia de amplificación para abordar las divisiones con cifras decimales. Al respecto, es importante puntualizar que las divisiones que se obtienen al amplificar los números originales tienen resultados iguales, y explicar por qué.

Por ejemplo, 0,982 : 0,82 = 9,82 : 8,2 = 98,2 : 82 = 982 : 820 = 9.820 : 8.200, etc.

El alumno o alumna seleccionará la que le parece más fácil, más directa de resolver. Habitualmente se recurre a números naturales porque se conocen las tablas o es más fácil imaginar cuántas veces está contenido, por ejemplo, 5 en 45 que 0,5 en 4,5.

Es conveniente trabajar situaciones como las descritas y pedir que observen y fundamenten las conclusiones que obtienen. Es importante revisar, a partir de este tipo de situaciones, los algoritmos tradicionales.

2. Trabajando en grupos leen las siguientes situaciones, las resuelven y presentan sus soluciones al curso.

a) *En una fábrica familiar de manteles, deciden sacar al mercado un nuevo producto: manteles de Navidad. Ellos desean hacer 20 manteles rectangulares, por cada pieza de género. Una pieza de algodón mide 1,40 m de ancho y trae aproximadamente 45 m de tela. Para aprovechar el ancho de la tela deciden que los manteles tengan esa misma medida de ancho.* ¿Cuál debe ser el largo de cada mantel para aprovechar al máximo cada pieza de género?

- Para apoyar la comprensión del problema hacen un dibujo esquemático del mantel y la pieza de género. Intentan alguna estrategia para encontrar la solución, ya sea gráfica, por cambio de unidades de medida (equivalencia de metros y cm) o descomposición de los números.
- Algunos grupos buscan la respuesta usando calculadora y otros grupos lo resuelven usando lápiz y papel, como se establezca previamente.
- Comparan las respuestas entre aquellas realizadas con calculadora y las realizadas sin ella. Tratan de explicar el número decimal correspondiente al resultado de la calculadora.
- Todos los grupos buscan estrategias para dividir el resto sin usar la calculadora (es decir, para obtener los decimales posibles).

COMENTARIO

Como se comentó en el ejemplo 1 (a), es probable que algunos alumnos y alumnas que resolvieron con lápiz y papel hayan hecho una división sin obtener decimales (es decir, con resultado 2 y resto 5); que otros hayan obtenido decimales, y otros hayan encontrado el resultado del reparto a través de algún procedimiento diferente (buscar un número que multiplicado por 20 dé 45, por ejemplo). Según eso, es importante llevarlos a la división y mostrar cómo proceder para seguir dividiendo el resto. De este modo, podrán llegar al mismo resultado que con la calculadora.

- Analizan sus procedimientos guiados por preguntas como:
  El procedimiento utilizado para resolver la primera división (45:20) ¿sirve si se consideran, por ejemplo, 25 manteles o 24 ó 30? ¿Qué pasaría si fueran 22 manteles?
- Resuelven con la calculadora e interpretan las cifras decimales considerando si es pertinente o no el resultado (es decir, si es realizable la división de la pieza de género). Determinan cuántos centímetros (o metros) podría medir cada mantel si se hicieran 22 con cada pieza de género.
- Presentan los procedimientos y establecen conclusiones en torno a una forma eficiente de repartir el resto y al análisis de la cantidad de cifras decimales que es pertinente obtener en cada división. Esto último corresponde a preguntarse: ¿Hasta cuándo es pertinente repartir el resto en este caso? ¿Por qué? Es decir, ¿con cuánta precisión se puede dividir la pieza de tela considerando los instrumentos de medición (huincha o metro), los procedimientos para cortar, el uso que se le dará?

b) Analizan y resuelven la siguiente situación (que es una variación de la anterior).
   En otra fábrica familiar se decide sacar al mercado cobertores de cama de una plaza. Para ello están calculando cuántos se pueden confeccionar por cada pieza de los distintos géneros y lograr el

máximo de aprovechamiento del material. El molde elegido mide 1,40 m x 2,30 m y el tipo de género seleccionado es algodón. Una pieza de algodón mide 1,40 m de ancho y trae aproximadamente 40 m de tela. ¿Para cuántos cobertores alcanza una pieza de género?

- Determinan al menos dos procedimientos diferentes para encontrar la respuesta. Confirman su resultado en la calculadora.
- Analizan la división como un procedimiento útil en la solución de la situación. Comprueban su respuesta resolviendo una división que utiliza un cambio de unidades como el siguiente, cuidando que tanto el dividendo como el divisor tengan la misma unidad:
  40 m : 2,3 m =
  4.000 cm : 230 cm =
- Revisan y explican los algoritmos tradicionales con el procedimiento usado anteriormente (cambio de unidades).
- Interpretan el cuociente y el resto en cada caso. Deciden hasta cuándo es pertinente seguir dividiendo el resto y cuándo es posible de despreciar.

COMENTARIO

Este ejemplo es análogo al 1, por lo que son válidos los mismos comentarios respecto a las estrategias a utilizar y los análisis correspondientes.

Actividad 6

A partir de diversas situaciones deciden cuándo y cómo usar estrategias de redondeo de productos y cuocientes. Estiman las eventuales distorsiones de la información debidas a las aproximaciones e investigan cómo se resuelven estas diferencias en situaciones concretas.

Ejemplos

1. Leen y comentan las siguientes situaciones y realizan las actividades que se proponen con cada una.

a) *El rendimiento promedio de un cierto tipo de auto en carretera es de 14,8 kilómetros por cada litro de bencina, es decir, con 1 litro de bencina se puede recorrer 14,8 km. Si en determinado momento el estanque contiene 9,5 litros de bencina ¿se alcanza a recorrer 160 km?*

- Discuten sobre la conveniencia o la necesidad de encontrar una respuesta exacta o aproximada en la situación. Determinan al menos dos redondeos diferentes para multiplicar y encontrar la respuesta aproximada al problema.

- Discuten las siguientes expresiones, determinan las que les parecen más adecuadas para responder la pregunta y fundamentan la elección:

  Yo digo que el auto recorre un poco más de 9 veces 15 kilómetros, es decir, la bencina que tiene alcanza para recorrer más de 135 km (porque 9 x 15 = 135).

  Yo digo que el auto recorre un poco menos de 10 veces 15, es decir, con la bencina que hay en el estanque se alcanza a recorrer un poco menos de 150 km (porque 10 x 15 = 150).

  Yo pienso: los kilómetros que alcanza a recorrer el auto están entre 135 y 150, porque 10 x 15 = 150 y 9 x 15 = 135.

COMENTARIO

Las estrategias para redondear los números y así obtener una respuesta aproximada dependen de la situación y de los números. Sin embargo, en cualquier caso es necesario darse cuenta si el resultado obtenido es mayor o menor que el exacto o entre cuáles rangos se ubica. Por ejemplo, si se redondea disminuyendo un factor o ambos, el producto será menor que el resultado obtenido al multiplicar por los valores originales.

Distinto es el caso de la división, en ese caso el cuociente obtenido con números redondeados será mayor o menor que el obtenido con los números originales, dependiendo de la relación entre dividendo y divisor. De ahí la importancia de escoger adecuadamente los números, las situaciones y algunas estrategias a considerar. Por ejemplo, para calcular, aproximadamente, cuánto es 4,5 : 1,8 se pueden utilizar algunos procedimientos como:

- aproximar sólo el divisor, es decir, 4,5 : 2 (lo que es 2 y algo más, que si se quiere cuantificar puede hacerse preguntándose por la mitad de 0,5). De este modo se sabe que este resultado aproximado es menor que el obtenido con los números originales;
- amplificar para resolver 45 : 18 y obtener un resultado exacto o aproximado (según convenga a la situación).

b) *Pedro está interesado en comprar una casa y desea postular al subsidio habitacional. Según sus averiguaciones, el monto de este subsidio corresponde a 120 UF. Para tener una idea más clara de lo que significa decide calcular de manera rápida aproximadamente a cuánto corresponde este monto en pesos.*

   ¿Qué procedimiento le recomendarían desarrollar para hacer una buena estimación?

- Averiguan el valor de la UF en un día determinado y hacen una estimación del producto correspondiente.
- Calculan el valor exacto del subsidio dado el valor de la UF en ese día. (Pueden utilizar una calculadora).
- Comparan el resultado exacto con las estimaciones realizadas.
- Repiten sus cálculos aproximando el valor de la UF a cifras enteras antes de multiplicar por 120 y lo comparan con el resultado obtenido al calcular sin aproximar previamente. Evalúan la diferencia en función del organismo que otorga el subsidio y del beneficiario.

  ¿Cómo se podría cuantificar esa diferencia considerando que hay miles de beneficiarios?

COMENTARIO

En esta situación, considerando el valor de la UF el 15 de marzo del 2000, algunas posibilidades de estimación del resultado pueden ser:

- redondear solamente el valor de la UF del día al valor superior. En este caso, 15.162,87 a 15.163 y luego multiplicar; se interpreta el resultado como ligeramente superior al exacto;
- redondear el valor de la UF a 15 mil pesos y luego multiplicar. En este caso se sabe que el resultado es menor que el producto obtenido al multiplicar por el valor exacto de la UF;
- considerar el valor exacto, multiplicar y luego interpretar el resultado, aproximadamente. Si es esta la posibilidad escogida por algún grupo, hacer reflexionar en torno a la razón por la cual se desea el valor aproximado. Si es por realizar un cálculo más rápido y fácil (a modo de cálculo mental), entonces esta no es la mejor alternativa, sino más bien redondear a 15 mil. En cambio, parece la elección adecuada si sólo se quiere retener en la memoria el monto aproximado (sobre todo que el valor de la UF en pesos varía diariamente), por lo que se realiza el ejercicio con calculadora y se redondea el resultado (sin duda los números terminados en ceros son más fáciles de retener en la memoria).

c) *Margarita está calculando cuánto deberá pagar cada mes y durante 9 meses por un préstamo de consumo que, incluyendo los intereses, corresponde a 26,82 UF en total. Todas las cuotas deben ser del mismo valor.*
¿Cuánto es el monto aproximado de cada cuota mensual?

- Averiguan el valor de la UF en un día determinado. Buscan estrategias de estimación del cuociente correspondiente.
- Calculan el valor exacto de la cuota según el valor de la UF de un día específico.
- Comparan el resultado exacto con las estimaciones realizadas anteriormente y responden si el valor aproximado es mayor o menor que el valor exacto.

COMENTARIO

En este ejemplo y en el anterior es muy importante que los niños y niñas evalúan las eventuales diferencias desde el punto de vista de los actores involucrados, por una parte, y de la cantidad de personas que se verían beneficiadas, por ejemplo, en el caso del subsidio. Una diferencia que individualmente parece pequeña ($100 aproximadamente en el primer caso) resulta significativa al considerar a miles de beneficiados por el subsidio. La idea es que lo que parece “despreciable” por tratarse de “décimas o centésimas de un peso” adquiere otro carácter dependiendo de la situación.

Complementariamente, se puede proponer averiguar qué significa en las cuentas de servicios (luz, agua, otras) la expresión “ajuste de sencillo.”

d) Evalúan las estrategias presentadas al curso en cada uno de las situaciones, y deciden cuáles resultaron más pertinente en función, por ejemplo, de la eventuales pérdidas de información.

- Deciden algunos criterios globales que les permita enfrentar el redondeo de los números en situaciones de multiplicación y división.

COMENTARIO

Como se ha establecido en el primer comentario, el redondeo depende de las características de los números involucrados, de las operaciones aritméticas por realizar y de la situación. Sin embargo, a través de cada punto de esta actividad se ha intentado presentar diferentes aspectos que es necesario considerar en las conclusiones.

2. Leen y comentan las siguientes situaciones y realizan las actividades que se presentan a continuación.

a) *Pedro está interesado en comprar una casa, para ello decidió abrir una libreta de ahorro para la vivienda. El monto mínimo acordado con el banco corresponde a 2 UF, pero Pedro se propuso ahorrar 2,5 UF al mes.*
¿A cuánto dinero corresponde el ahorro mínimo acordado con el banco?
¿Cuánto más que el mínimo depositará Pedro en este mes?

b) Javier dispone cada semana de 5.000 pesos para comprar bencina. Si el precio del combustible es de 298,25 pesos por litro, ¿para cuántos litros de bencina le alcanza?

- Buscan estrategias de estimación del cuociente.
- Calculan el valor exacto.
- Comparan el resultado exacto con las estimaciones realizadas anteriormente.
- Evalúan estrategias presentadas al curso y deciden cuál de los redondeos es más pertinente utilizar.

c) Evalúan las estrategias presentadas al curso en cada una de las situaciones, y deciden cuáles resultaron más pertinentes, por ejemplo, en función de la eventuales pérdidas de información.

- Deciden algunos criterios globales que les permita enfrentar el redondeo de los números en situaciones de multiplicación y división.

COMENTARIO

Este ejemplo es análogo al ejemplo 1, por ello los comentarios realizados en él son igualmente válidos. Se pueden abordar estas situaciones de redondeo analizando las distintas estrategias presentadas por los alumnos y alumnas y también proponer algunas para el análisis como las expuestas en el ejemplo anterior.

Actividad 7

Resuelven diversos problemas que permitan:

- **relacionar la multiplicación con la división;**
- **establecer conclusiones referidas al reemplazo de operaciones que faciliten el cálculo.**

Ejemplos

a) *Carlos y Margarita tienen una discusión respecto del cálculo del precio de un cuarto de kilo de queso. Carlos dice que como $\frac{1}{4}$ de kilo es equivalente a 0,250 kg se debe multiplicar el precio del kilo por 0,250 para obtener el total a pagar. Sin embargo, Margarita dice que es mejor dividir el precio del kilo de queso por 4, ya que corresponde a la cuarta parte.*

- Discuten la situación a partir de preguntas como:
  ¿Quién tiene la razón?
  ¿Qué diferencias hay entre los dos procedimientos?
  ¿Cuál de los cálculos realizados puede resultar más rápido?

- Amplían su discusión y análisis realizando distintas operaciones como, por ejemplo:

46.000 x 0,5 y 46.000 : 2	500 x 0,1 y 500 : 10
0,2 x 90 y 90 : 5	500 x 0,01 y 500 : 100
0,125 x 40 y 40 : 8	500 x 0,001 y 500 : 1.000
	500 x 0,0001 y 500 : 10.000

- Comparan los procedimientos. Deciden en qué casos les parece más adecuado, más rápido, más seguro o más fácil, multiplicar y en cuáles dividir.

- Concluyen técnicas de cálculo rápido de productos por un factor decimal para los casos en que esta operación se pueda sustituir por una división por un número natural.

COMENTARIO

Para realizar el análisis los alumnos y alumnas recurren a sus conocimientos sobre operaciones con fracciones, escritura de decimales como fracciones y a propiedades de las operaciones (como la conmutatividad y otras, trabajadas en NB4 y niveles anteriores).

Por ejemplo, $0{,}1 \times 500 = \frac{1}{10} \times 500 = \frac{500}{10} = 500:10$

También es interesante reflexionar sobre la relación entre multiplicar por 0,1; 0,01; 0,001 y dividir por potencias de 10 correspondientes. El tratamiento específico de las potencias de 10 se realizará en el próximo curso (NB6).

b) *La dueña de un negocio compra 100 kilos de lentejas y decide envasarlos sólo en bolsas de 0,5 kg. Una de sus hijas le propone resolver 100 : 0,5 para obtener el total de bolsas; en cambio, su otra hija multiplica 100 x 2.*

- Discuten la situación a partir de preguntas como:
  ¿Quién llega a una respuesta correcta?
  ¿Qué diferencias hay entre ambos procedimientos?
- Amplían su discusión a partir de la pregunta siguiente:
  ¿Cuántas bolsas necesitaría en el caso de envasar los 100 kg en bolsas de 0,250 kg ? ¿Y en bolsas de 0,125 kg?
- Amplían su discusión y análisis realizando distintas operaciones como, por ejemplo:
  200 : 0,1 y 200 x 10
  200 : 0,01 y 200 x 100
  200 : 0,001 y 200 x 1.000; etc.
- Establecen conclusiones respecto a técnicas de cálculo rápido de cuocientes.

COMENTARIO

En la unidad de proporcionalidad y en contextos de cálculo de porcentajes se establece la relación entre multiplicar por 0,2 y dividir por 5 para calcular el 20% de un mismo referente. En esta unidad sólo se establece la relación multiplicar por 0,2 y dividir por 5.

El propósito de esta actividad es entregar estrategias y reflexionar sobre ellas en diversas situaciones de manera de desarrollar capacidad para decidir entre diferentes procedimientos de cálculo, comprendiendo que son equivalentes y por qué.

Actividad 8

Interpretan información numérica interesante obtenida en diversas fuentes (encuestas, diarios, almanaques y otros) utilizando en su análisis indicadores de dispersión de los datos y medidas de tendencia central; deciden en qué casos es conveniente y necesario usarlas para analizar la información.

Ejemplos

1. Realizan un estudio sobre la estatura de alumnos y alumnas de 5º, 6º, 7º y 8º en su escuela.

COMENTARIO

Esta sugerencia de actividad puede ser modificada en escuelas que no son mixtas, tal vez pueden reunirse con otra en la cual los estudiantes sean del otro sexo, o bien escoger otra muestra de jóvenes, por ejemplo, en clubes deportivos. La recolección de datos se puede realizar en los niveles que se prefiera y en los que sea factible la recolección.

- Organizan el estudio orientados por preguntas como:
  ¿Qué etapas podría tener este estudio?
  ¿En qué niveles podrían realizar el estudio?
  ¿Qué datos sería pertinentes recolectar?
  ¿Cómo se recolectarán?
- Hacen un cronograma y se distribuyen las tareas.
- Organizan y analizan la información de cada nivel. Se sugiere que:
  - Construyan una tabla de frecuencia con la estatura de los alumnos y alumnas, diferenciando la de hombres y mujeres.
  - Ordenen la información por sexo desde el de menor a mayor estatura.
  - Calculen el promedio y la moda de los datos por nivel y sexo.
  - Determinen el rango de dispersión y la mediana de los datos por nivel y por sexo.
- Relacionan los análisis parciales y obtienen conclusiones en relación con las tendencias de crecimiento de estatura en los alumnos y alumnas del nivel.
- Redactan un informe breve que incluya una descripción del proceso, los datos, el análisis y las conclusiones.

COMENTARIO

Un estudio que describe la estatura de los jóvenes puede ser motivador en este nivel, ya que el crecimiento es parte de sus preocupaciones y proceso personal. Es una buena instancia para realizar un trabajo interdisciplinario con otros sectores o subsectores; por ejemplo, la medición se puede hacer con Educación Física; el estudio a través de fuentes formales con Estudio y Comprensión de la Naturaleza (¿qué dice la biología al respecto? por ejemplo) y el análisis estadístico de la situación en la escuela, con Educación Matemática.

Preguntas relativas a las diferencias entre el crecimiento de hombres y mujeres u otras relativas a contrastar la información que proporciona la biología con lo que sucede en la escuela (¿sucederá en esta escuela lo mismo que dicen los libros en cuanto al período de crecimiento, al "estirón de la pubertad" en hombres y mujeres?) son ejemplos de preguntas que pueden orientar el análisis de los datos y fundamentan el uso de algunos indicadores estadísticos.

En cuanto a los indicadores estadísticos, en niveles anteriores se ha trabajado con la moda y la media; ahora se incorporan la mediana y el rango de dispersión. Se sugiere, del mismo modo como se trabajó en el nivel anterior, introducirlos a partir de actividades como la descrita, y con apoyo de preguntas que lleven, sobre todo, a comprender la importancia de ellos para la descripción de un fenómeno y en el análisis de los datos. Tanto la mediana como el rango de dispersión aportan información sobre la homogeneidad (o heterogeneidad) de los grupos, por lo tanto, las preguntas van orientadas en ese sentido.

Algunas preguntas sugeridas pueden ser como las siguientes:

Si dos cursos tienen la misma estatura media ¿se puede asegurar que entre el estudiante más bajo y el más alto hay poca diferencia?

A simple vista, un curso tiene mayor cantidad de estudiantes altos que otro, sin embargo la estatura media es la misma. ¿Cómo puedo interpretar esto?

En un curso que tiene el más bajo promedio de estatura está el niño o niña más alto o alta de los niveles. ¿Cómo se explica esto? ¿Qué alumnos y alumnas pertenecerían a la mitad más alta del curso y quiénes a la mitad más baja? ¿En cuál de los dos grupos la diferencia de estatura es menor? Este tipo de pregunta apunta a fijarse en la mayor o menor homogeneidad de cada grupo.

2. Leen, comentan y analizan la siguiente situación.

La profesora de Educación Física quiere tener una idea clara del rendimiento de la mujeres y de los hombres en algunas pruebas deportivas. Para ello recopila y analiza información, registrada en las siguientes tablas:

Tiempo en recorrer 30 metro planos (expresado en segundos)

Mujeres		Hombres	
María	5,34	Luis	5,53
Sofía	5,50	Juan	6,03
Isabel	5,16	Pablo	6,69
Blanca	6,01	Pedro	5,69
Silvia	5,13	Marcos	5,12
Mónica	5,53	Matías	5,09
Ana	5,16	Diego	6,00
Lucía	6,12	Tomás	6,40
Carla	5,31	Felipe	5,78
Claudia	5,61	José	6,03
Lorena	5,34	Carlos	6,00
Marta	6,25	Raúl	5,87
Carola	5,22	Aníbal	6,09
Juana	5,60	Daniel	5,44
Tamara	5,15	Claudio	5,47
Pamela	6,28	Eduardo	5,22
Paola	6,03	Víctor	5,13
Loreto	6,35	Ignacio	5,84
Paula	6,04	Jorge	5,31

Alcance del lanzamiento de una pelotita (expresado en metros)

Mujeres		Hombres	
María	7,20	Luis	7,35
Sofía	5,60	Juan	6,30
Isabel	5,80	Pablo	7,80
Blanca	5,90	Pedro	5,82
Silvia	6,50	Marcos	6,43
Mónica	6,90	Matías	6,41
Ana	8,70	Diego	7,81
Lucía	4,30	Tomás	6,98
Carla	7,60	Felipe	7,40
Claudia	7,40	José	8,00
Lorena	8,80	Carlos	8,50
Marta	6,50	Raúl	7,60
Carola	6,30	Aníbal	7,80
Juana	6,70	Daniel	8,00
Tamara	10,0	Claudio	7,50
Pamela	5,10	Eduardo	7,90
Paola	7,30	Víctor	8,10
Loreto	7,00	Ignacio	8,20
Paula	10,3	Jorge	5,92

% de logro en saques de voleybol

Mujeres		Hombres	
María	60	Luis	50
Sofía	70	Juan	70
Isabel	55	Pablo	70
Blanca	40	Pedro	75
Silvia	80	Marcos	90
Mónica	80	Matías	60
Ana	55	Diego	70
Lucía	70	Tomás	80
Carla	80	Felipe	90
Claudia	90	José	85
Lorena	65	Carlos	70
Marta	70	Raúl	60
Carola	85	Aníbal	50
Juana	65	Daniel	75
Tamara	55	Claudio	55
Pamela	75	Eduardo	45
Paola	45	Víctor	60
Loreto	95	Ignacio	40
Paula	70	Jorge	55

- Analizan la información determinando:

  ¿Qué preguntas se podría haber planteado la profesora antes de registrar los datos y que ahora puede responder con la información disponible?

  ¿Qué medidas de tendencia central podría utilizar la profesora con los datos disponibles para darse una idea general del rendimiento de sus alumnos y alumnas ¿Con cuáles datos? Explica tus sugerencias.

  ¿Crees que podría obtener información interesante si calculara el rango de dispersión de datos? ¿En cuál de las tablas? Fundamenta tu respuesta.

  ¿Qué grupo consideras tú más homogéneo en su rendimiento y por qué?

COMENTARIO

El centro de este ejemplo es discriminar con cuáles datos es pertinente obtener las medidas de tendencia central y el rango de dispersión y si aporta al análisis que se desea. Por ejemplo, en el caso de los porcentajes de logro de los saques, no es posible obtener la media a partir de los porcentajes porque se desconoce el total de intentos de saques de cada niña y niño. Es decir, sólo se podría calcular directamente la media de los porcentajes si cada niño y niña hubiera realizado la misma cantidad de lanzamientos.

Otro tipo de preguntas que se pueden proponer están sugeridas en el ejemplo anterior.

Actividades de evaluación

A continuación se proponen algunas actividades y problemas para la evaluación de los aprendizajes esperados de la unidad y que pueden ser incorporadas en su plan de evaluación. Algunas de las actividades están diseñadas para ser trabajadas en grupo.

En la columna de la derecha se especifican algunos indicadores que orientan las observaciones del logro de los aprendizajes.

Ejemplos de actividades y problemas	Indicadores / Observar que:
Interpretan el significado de las cifras decimales en informaciones numéricas referidas a diferentes magnitudes y unidades.	
Ejemplo En cada una de las siguientes situaciones, interpretan el significado de las cifras decimales identificando la unidad a la que están referidas.	• Determinan la unidad referente de la cantidad decimal.
La 32ª maratón internacional de esquí que se realizó en Suiza contempló una carrera de 42,2 km.	• Expresan la magnitud de manera aproximada (por ejemplo, que la carrera tiene más de 42 km); expresan la cifra decimal utilizando la misma unidad u otra equivalente (por ejemplo, dos décimas de kilómetros o 200 metros).
La empresa "Los Pajaritos" registró el año pasado una pérdida total anual de $ 1.345,9 millones.	• Utilizan "un millón" como unidad y determinan "décimas de millones."
La inversión total en la Línea 5 del Metro asciende a 7,75 millones de UF.	
La población de China, a fines del siglo XX, era de, aproximadamente, 1,2 millones de habitantes.	
En una carrera de 100 metros planos, un atleta superó al segundo competidor por sólo 0,9 segundos.	• Comprenden que, en este caso, la unidad es un segundo y que el decimal representa décimas de segundo.

Resuelven problemas utilizando redondeos para hacer cálculos aproximados con decimales y explican los criterios utilizados.

Ejemplo

a) Una empresa de teléfonos tiene la siguiente tarifa para las llamada de larga distancia a determinadas ciudades: 7,45 pesos por segundo.

Una persona utiliza su teléfono durante 4.298 segundos en el mes:

Para hacer un cálculo aproximado y rápido del costo total de sus llamadas piensa:

- Multiplicar 4.300 por 7
- Multiplicar 4.300 por 8

¿Cuál de las dos usarías tú?
¿Por qué?

- Determinan que con cualquiera de los dos procedimientos el resultado será del mismo modo relativamente cercano al real (uno menor y el otro mayor).

b) Si el litro de bencina cuesta $328 y el chofer del bus quiere poner 40 litros:

- ¿Cuánto deberá pagar, aproximadamente?
- Si tiene $5.000 para recargar de bencina su bus. ¿Para cuántos litros le alcanza, aproximadamente?

- Recurren efectivamente a un cálculo aproximado del tipo 300 por 40 ó 330 por 40 determinando un rango ("entre tanto y tanto" o "un poco más o un poco menos de").
- Eligen adecuadamente las cantidades y explican si es mayor o menor (por ejemplo, dividen 5.000 por 40 y dicen que podría comprar más litros o 5.000 por 300 e indican que puede comprar menos).

c) Mónica tiene $200.000 y desea hacer un depósito en UF. Si el valor de la UF ese día es de $15.190,78 ¿Cuántas UF aproximadamente puede depositar?

- Aproximan adecuadamente y explican si el resultado es cercano al real y si es mayor o menor.

Resuelven problemas que impliquen comparar las características de dos grupos a partir de algunas medidas de tendencia central y de dispersión de los valores referidos a una variable.

Ejemplo
En el campeonato de básquetbol de la escuela, la final la disputarán los equipos de 7º A y 7º B.

En los entrenamientos se registró el número de encestadas por jugador en tiros libres. Cada equipo está compuesto por 11 personas, considerando a los reemplazantes. Los resultados son los siguientes:

Curso: 7º A
Rango de dispersión = 20 - 8 = 12
Media = 15
Mediana = 14
Moda = 18

Curso: 7º B
Rango de dispersión = 18 - 5 = 13
Media = 12
Mediana = 13
Moda = 11

Considerando los datos registrados:
¿Cuál de los dos equipos consideras que tiene mejor rendimiento en tiros libres?
¿Por qué?
En tu opinión ¿cuál de los dos grupos tiene un comportamiento más homogéneo? Explica.

- Utilizan todos los indicadores entregados (de tendencia central y de dispersión) para hacer una elección y los interpretan adecuadamente en su fundamentación.

Resuelven problemas que impliquen calcular multiplicaciones y divisiones con números decimales.

Ejemplo

1. Leen la siguiente situación y responden las preguntas.

Una niña colecciona monedas y billetes de distintos países. Al contarlos se pregunta a cuántos pesos chilenos corresponde lo que tiene.
Para calcular averigua en una casa de cambio las equivalencias:

1 dólar (moneda de Estados Unidos de América) son 508,4 pesos.
1 boliviano (moneda de Bolivia) son 86,6 pesos.
1 quetzal (moneda de Guatemala) son 65,3 pesos.

La niña tiene:

- 5 monedas de 50 centavos de dólar y 12 de 25 centavos de dólar.
- 7 monedas de 2 bolivianos.
- Un billete de 10 quetzales y 5 monedas de 1 quetzal.

a) Cuántos pesos chilenos obtendría por los dólares? ¿y por los bolivianos? ¿y por los quetzales?

b) ¿Cuántos pesos obtendría en total?

c) Si ella decidiera cambiar todo a dólares al mismo precio de la tabla, ¿cuántos dólares obtendría?

- Asocian los diferentes datos (precios, en este caso) adecuadamente antes de resolver las operaciones.
- Eligen las operaciones adecuadas y las resuelven de manera secuenciada.
- Logran obtener una respuesta razonable (exacta o en un rango).

2. Juego con calculadora.

Se juega en parejas con una calculadora (en la que sólo se pueden usar las teclas de multiplicación y división) y un conjunto de preguntas para cada jugador o jugadora (puede ser un set de tarjetas).

Se sortea la partida. El primer jugador o jugadora lee una pregunta y la contesta. La otra persona hace el cálculo correspondiente con la calculadora.

Si la respuesta es correcta obtiene 1 punto y puede seguir jugando. Si es incorrecta le toca a su pareja.

Ejemplos de preguntas:

a) Si comienzas con el 5 en la calculadora ¿por cuál número dividirías o multiplicarías para obtener 2,5?

b) Si comienzas con el 5 en la calculadora ¿por qué número dividirías o multiplicarías para obtener 7,5?

c) Si comienzas con el 5 en la calculadora ¿por cuál número dividirías o multiplicarías para obtener 17,5?

d) Si comienzas con el 5 en la calculadora ¿por cuál número dividirías o multiplicarías para obtener 54,5?

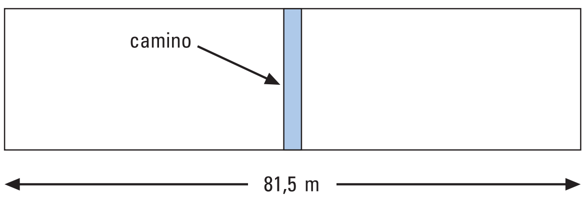
e) Si comienzas con el 5 en la calculadora ¿por cuál número dividirías o multiplicarías para obtener 3,5?

f) Si comienzas con el 5 en la calculadora ¿por cuál número dividirías o multiplicarías para obtener 0,45?

- Muestran que pueden dividir o multiplicar indistinta y convenientemente.
- Si no determinan directamente un número intentan acotarlo dentro de un rango razonable. Por ejemplo, en la letra (b) dicen “un número entre 1 y 2”. En la letra (d), por ejemplo, no sería razonable un rango entre 10 y 20.
- Si no les resulta, pueden reconocer dónde estuvo su falla.

Resuelven problemas que implican resolver operaciones con números decimales, encuentran los resultados de las operaciones y entregan una solución conveniente.

Ejemplo
Un terreno rectangular de 81,5 m de largo se divide en dos sitios iguales por un camino de 2,5 m de ancho, tal como muestra la figura:



Se coloca una cerca en cada sitio cuyo precio es de $3.000 el metro. El gasto total es de $768.000.

¿Cuáles son las dimensiones de cada sitio?

- Pueden explicar lo que se está pidiendo y describir una estrategia general para abordar la situación.
- Consideran todos los datos necesarios. Hacen cálculos intermedios y los utilizan convenientemente para encontrar una solución a la pregunta.

Unidad 2

Geometría: prismas, pirámides y triángulos

TIEMPO ESTIMADO: 8-9 SEMANAS

Contenidos

Figuras y cuerpos geométricos

- Redes para armar prismas y pirámides. Armar cuerpos geométricos a partir de otros más pequeños.
- Estudio de triángulos: características de sus lados y de sus ángulos.
- Construcción de alturas y bisectrices en diversos tipos de triángulos.
- Uso de instrumentos (regla, compás, escuadra), en la reproducción y creación de triángulos y para la investigación de las condiciones necesarias para dibujar un triángulo.

Perímetro y área

- Medición y cálculo de perímetros y de áreas de triángulos de diversos tipos en forma concreta, gráfica y numérica.
- Investigación de las relaciones entre medidas de altura y base y el área correspondiente, en familias de triángulos generadas al mantener dichas medidas constantes.

Aprendizajes esperados

Las alumnas y los alumnos:

1. Caracterizan familias de pirámides y prismas rectos que se generan al hacer variar las caras de dichos cuerpos geométricos; seleccionan las figuras necesarias para construir redes de pirámides y de prismas rectos (en forma y cantidad adecuadas).
2. Construyen triángulos con regla y compás, y describen verbalmente el procedimiento realizado, considerando los elementos que aseguran el cumplimiento de las condiciones que hacen posible su construcción.
3. Reconocen diversos elementos de los triángulos, los relacionan con las características de éstos y los utilizan adecuadamente para clasificarlos y para la reproducción y/o creación de triángulos.
4. Justifican la igualdad de las áreas y diferencia de perímetro de una familia de triángulos de base común construidos entre dos paralelas.

Orientaciones didácticas

Como en los niveles anteriores, el acercamiento de los niños y las niñas a la geometría se hace esencialmente a partir de la construcción y el dibujo. De este modo, en el inicio, las figuras y sus elementos se contextualizan en cuerpos geométricos. En la construcción de éstos se va generando la necesidad de conocer y comprender características particulares de las figuras.

Por esta razón, se propone un trabajo amplio con pirámides, en las cuales, además de sus características como cuerpos, se hace una observación sistemática de los triángulos.

El triángulo como figura particular está al centro de la geometría en este nivel. Los niños y niñas han trabajado con triángulos desde el NB1. Ahora se trata de estudiarlos en mayor profundidad, ubicando algunos de sus elementos (altura, bisectrices).

Se propone el análisis por familias de figuras y de cuerpos con el fin de desarrollar procesos sistemáticos de observación, análisis y sistematización. Las familias de figuras y de cuerpos permiten un mejor acercamiento a las regularidades de los elementos geométricos, hacer comparaciones, establecer regularidades.

En este sentido, se pone especial énfasis en el desarrollo de procesos sistemáticos que permitan desarrollar las habilidades para enfrentar una situación, pregunta, dilema, establecer procedimientos, sistematizarlos y llegar desde conclusiones particulares a generalizaciones; es decir, a conclusiones válidas para una situación general.

En este proceso, es importante insistir en que el ensayo, la representación gráfica y los eventuales errores, traspiés, idas y vueltas, constituyen una parte central del proceso de aprendizaje. Repetidamente se propone en las actividades que los alumnos y alumnas expresen verbalmente lo que han hecho, expliquen sus formas de proceder, fundamenten sus conclusiones y las confronten con las de otras personas.

En relación con los triángulos, en esta unidad se enfatiza el dibujo. Se trata de que se llegue a una convicción respecto de cuándo es posible y cuándo no es posible construir un triángulo cualquiera, y algunos en particular. El triángulo es una figura que posee características muy particulares que han sido estudiadas paulatinamente en los diferentes niveles. Al comienzo se abordó principalmente su indeformabilidad (NB4). Ahora se trata básicamente la relación entre sus lados para poder ser construido (la suma de la longitud de dos lados cualesquiera debe ser mayor que la del tercero). No obstante, no se trata de enseñar esto como una verdad. Se propone un conjunto de actividades que conduzcan a los alumnos y alumnas a descubrir y comprender dicha condición.

Por otra parte, es importante que los niños y niñas comprendan que en un triángulo cualquiera de sus lados puede ser considerado como la base. No obstante, existen posiciones privilegiadas para enfrentar determinados problemas y visualizar determinadas situaciones. Así, por ejemplo, no hay ninguna razón para no privilegiar como base uno de los catetos en un triángulo rectángulo cuando se trata de calcular su área y así la altura coincidirá siempre con el otro cateto.

Se insiste nuevamente en el uso de instrumentos que apoyen los procesos de investigación y, además, la visualización de las figuras estudiadas en cuerpos geométricos. En estos procesos, es decir, en la indagación, es importante que los alumnos y alumnas formulen conjeturas, imaginen, busquen libremente explicaciones, sistematicen, expresen y fundamenten, de manera clara, sus conclusiones.

Actividades de aprendizaje

Actividad 1

Arman y desarman cuerpos geométricos construidos a partir de la combinación de otros más pequeños para observar los cuerpos resultantes y establecer relaciones entre ellos.

Ejemplo

Organizados en grupos disponen de los siguientes materiales para realizar las actividades que se indican.

Al menos 64 cubos de las mismas medidas o las redes correspondientes para armarlos.
12 prismas cuya base sea un triángulo equilátero, o bien cajas de alimentos que tengan esta forma o la forma de otro prisma.

a) Utilizando los materiales disponibles y usando sólo los de un mismo tipo a la vez, arman cuerpos que tengan un mayor volumen. Los cuerpos pueden ser los que se identifican como “clásicos” (cubos, paralelepípedos, prismas rectos) o bien cuerpos (regulares o irregulares) que juntos formen un cuerpo geométrico clásico.

- Completan una ficha que incluya el dibujo esquemático del cuerpo formado, el cuerpo que utilizaron como unidad y cuántos utilizaron.
- Intercambian con otro grupo las fichas. Forman con sus materiales los cuerpos que se presentan en las fichas. Se corrigen mutuamente las respuestas o los dibujos, si es necesario.

COMENTARIO

Esta primera actividad sirve como base para enfrentar la siguiente, en la cual se pide imaginar la forma de los diferentes cuerpos que se generan a partir de un corte en un determinado cuerpo moldeado en plasticina u otro material de ese tipo.

b) Modelan pirámides y prismas rectos usando plasticina o greda (pueden ser de base cuadrada o triangular). Luego imaginan y plantean conjeturas sobre la forma y características que tendrán las partes que se obtendrían después de realizar un determinado corte recto en el cuerpo modelado.

- Confirman sus conjeturas realizando los cortes con un hilo, cuidando que el modelo no se aplaste con la presión del corte.
- Establecen cortes en el cuerpo original que permiten generar otros dos cuerpos geométricos congruentes entre sí.
- Presentan los hallazgos al curso y, en conjunto, establecen conclusiones en cuanto al tipo de corte realizado y la forma de las partes que se generaron a partir de él. Se destacan aquellos cortes a través de los cuales se obtienen partes congruentes.

COMENTARIO

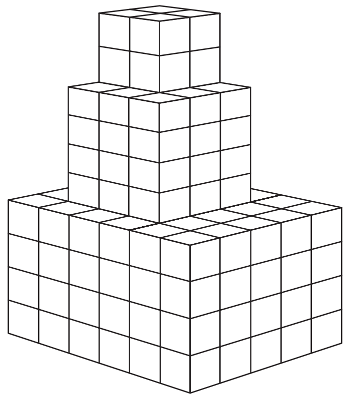
Puede apoyarse la actividad en las redes de puntos triangulares, utilizadas en NB4, ya sea para representar gráficamente los cuerpos geométricos originales o las partes que forman otros.

Respecto a la actividad relativa a los cortes, se puede proponer también que se dibujen los cuerpos y los cortes realizados. Estas tareas ayudan al desarrollo de habilidades espaciales en dificultad creciente; se recomienda partir primero con las representaciones planas de los cortes en prismas rectos para, posteriormente, dibujar los cortes en una pirámide.

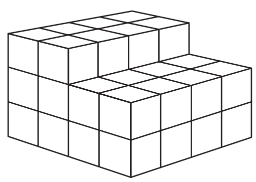
Se recomienda animar a las alumnas y los alumnos para que busquen distintas posibilidades de corte; y comparen un mismo corte en un prisma y una pirámide, proponiéndoles preguntas como ¿se produce el mismo efecto? ¿Por qué?

En NB4 se han estudiado los ejes de simetría en figuras planas y en representaciones planas de objetos tridimensionales, por lo cual parece interesante, como actividad de profundización, que al caracterizar los cortes que permiten generar dos cuerpos geométricos congruentes se hagan asociaciones con planos de simetría (no todos los cortes se constituyen en planos de simetría).

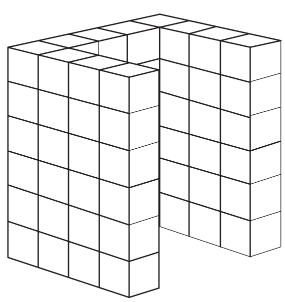
c) Responden preguntas relativas a completar de cuerpos geométricos clásicos, como las siguientes: ¿Cuántos cubitos se necesitarán como mínimo para completar el cuerpo del dibujo si se desea obtener un prisma recto?



¿Cuántos cubitos es necesario agregar, como mínimo, al cuerpo del dibujo si se desea completar un cubo?



¿Cuántos cubos pequeños son necesarios para completar ("rellenar") el prisma incompleto que aparece en el dibujo?



COMENTARIO

Con actividades como esta se trata de formar cuerpos sólidos, es decir, sin huecos en su interior. Esta actividad persigue ayudar a los alumnos y alumnas a desarrollar su imaginación espacial y reforzar la representación plana de cuerpos geométricos.

Actividad 2

Exploran redes de prismas y pirámides, modificando sus bases o sus caras laterales para describir los cambios en el cuerpo. Encuentran familias de prismas y pirámides que tienen las bases congruentes, describen sus características y establecen conclusiones.

Ejemplo

Dado un set de redes de prismas y pirámides realizan la siguiente secuencia de actividades, primero para los prismas rectos y luego para las pirámides.

a) Superponen las que tienen base congruente y completan un registro con la observación de las formas de las caras laterales.

b) Realizan una exploración que apunte a responder preguntas como las que se presentan a continuación:
- ¿Qué relación hay entre las caras superpuestas?
- ¿Se pueden construir más prismas (o pirámides) a partir de esa base? ¿Cuántas más? Arman los primas (o pirámides).
- Si comparas los diferentes prismas (o pirámides) ¿qué diferencias y semejanzas se observan entre ellos?
- ¿Cuál es el prisma (o pirámide) de menor altura que se puede construir con esa misma base? ¿Cómo sabes que es la menor?
- Y, al contrario, ¿existe una pirámide que corresponda a la de una altura máxima?
- Entonces, ¿en qué casos no es posible construir un prisma (o pirámide)?

COMENTARIO

Un procedimiento que puede facilitar la investigación es contar con un set de caras laterales en cartulina que puedan ser usadas para modificar la red primitiva y luego pegarlas con cinta adhesiva para comprobar si se arma el cuerpo.

c) Cada grupo presenta el producto de su exploración centrando su atención en una de las preguntas.

d) Se comparan las respuestas de las mismas preguntas para prismas rectos y pirámides y se concluye respecto a esta comparación.

COMENTARIO

Se ha usado la palabra altura asociándola a una noción intuitiva de la misma (la idea de altura de un triángulo, específicamente, se aborda de manera formal posteriormente en esta unidad).

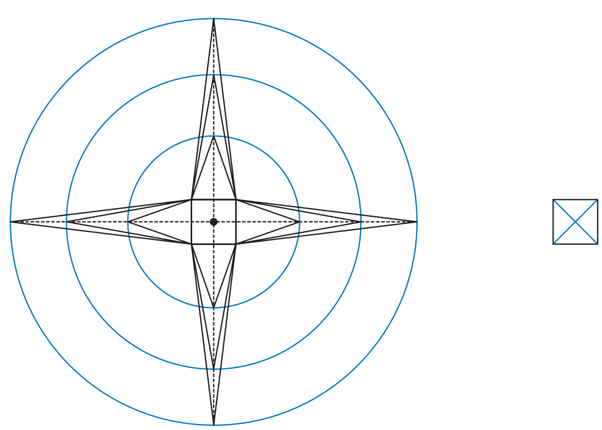
Redes que pueden utilizar para la exploración:
- 4 prismas rectos de igual base cuadrada, que se diferencien en la altura de las caras laterales;
- 4 prismas rectos de igual base pentagonal, que se diferencien en la altura de las caras laterales;
- 4 pirámides de igual base cuadrada, que se diferencien en la altura de las caras laterales;
- 4 pirámides de igual base pentagonal, que se diferencien en la altura de las caras laterales.

Para evitar que se entrampen en el dibujo de triángulos (que se aborda en esta unidad más adelante, se sugiere contar con un set de ellos que calcen con las bases y que, al mismo tiempo permitan el cierre del cuerpo. En el caso de los prismas esto no es necesario, pues en el nivel anterior los alumnos y alumnas aprendieron a construir cuadrados y rectángulos.

La comparación de los prismas (o pirámides) armados tiene la intención de observar que la variación de la altura del cuerpo lleva a la modificación de las alturas correspondientes de las caras laterales. En una actividad posterior referida a alturas de triángulos se abordará el análisis de las alturas relacionándolas con las caras laterales de un cuerpo geométrico.

Las preguntas relativas a determinar cuál es la pirámide y el prisma de menor altura que se puede formar a partir de determinada base tienen la intención de que las niñas y los niños realicen una búsqueda sistemática que les permita concluir que si bien existen infinitas redes de prismas y pirámides generadas al aumentar la longitud de la altura, no existen infinitas redes de prismas y pirámides que se generan al disminuirla.

En el caso del prisma recto, el cuerpo con menor altura podría ser aquel en el que ambas bases "casi se juntan" (altura muy cercana a cero). En el caso de la pirámide no ocurre lo mismo. Un diagrama como el que se presenta a continuación ayuda a establecer cuál puede ser la pirámide de menor altura:



En ella, los cuatro triángulos que conforman las caras laterales deben tener una altura mayor que los generados por las diagonales del cuadrado (base).

Actividad 3

Investigan, por medio de dibujos y construcciones concretas, las condiciones de construcción de un triángulo (relativas a los ángulos y a los lados). Establecen las condiciones de existencia de un triángulo.

Ejemplo

Organizados en grupos y utilizando el material adecuado (ver Comentarios) realizan las siguientes actividades.

a) Eligen tres segmentos cualesquiera e intentan formar un triángulo. Completan una tabla con las longitudes de los segmentos considerados y con una observación respecto de si es posible o no construir un triángulo con ellos.

Medidas de los segmentos			Es posible construir un triángulo

- Analizan los datos de la tabla para determinar por qué en algunos casos no se puede construir un triángulo y en qué casos es posible construir un triángulo con tres segmentos. Buscan una relación entre las longitudes de los tres trazos.
- Concluyen sobre las condiciones que deben cumplir tres segmentos para formar un triángulo. Justifican.

b) Eligen las piezas que representan ángulos e intentan formar un triángulo con ellas. Completan una tabla con las medidas de estos ángulos y con una observación respecto a si fue posible o no construir un triángulo con esos ángulos

Medidas de los ángulos			Es posible construir un triángulo

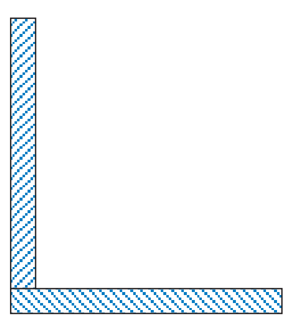
- Establecen conclusiones a partir de preguntas como las siguientes:
  ¿Pudieron construir un triángulo ubicando adecuadamente dos ángulos rectos?, ¿o con dos ángulos obtusos?, ¿o con dos agudos?, ¿por qué?
  ¿Lograron construir un triángulo con dos ángulos no rectos (obtusos o agudos)?, ¿en qué casos es posible? ¿por qué?
- Analizan los datos de la tabla para determinar por qué en algunos casos no se puede construir un triángulo y caracterizan las medidas de los ángulos de manera que sea posible formar un triángulo. Buscan relacionar las medidas de los tres ángulos y la suma de ellos en cada caso.
- Concluyen sobre las condiciones que deben cumplir los ángulos para formar un triángulo.

COMENTARIO

Esta parte de la actividad tiene por objeto concluir las condiciones de existencia de un triángulo cualquiera. La parte a) se refiere a la desigualdad triangular. El punto b) aborda intuitivamente el teorema referente a la suma de los ángulos interiores en un triángulo cualquiera. Este teorema se retomará en 8º Año Básico (NB6) a partir del análisis de las medidas de los ángulos entre rectas paralelas cortadas por una secante. En la parte c) de esta actividad se sugieren actividades para utilizar las conclusiones obtenidas. Es muy importante que las conclusiones de los alumnos y alumnas sean confirmadas (validadas) por su profesor o profesora a partir del establecimiento de conclusiones generales.

El material necesario para las actividades puede constar de:
- Tiras de cartón de 1 cm de ancho y de los largos que se indican:
  - 3 tiras de 2 cm
  - 1 tira de 3 cm
  - 1 tira de 4 cm
  - 1 tira de 5 cm
  - 1 tira de 8 cm

- Piezas de cartón que representen ángulos confeccionados en tiras de una longitud entre 15 a 20 cm, unidas como se muestra en la figura (en ángulo de 90º):

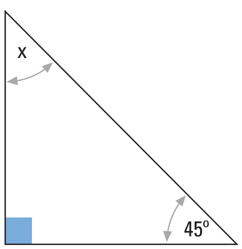


Las medidas de los ángulos pueden ser:

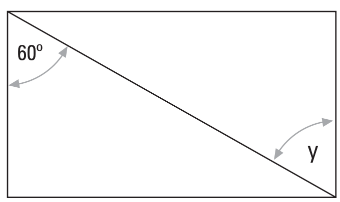
- 2 piezas cuyos ángulos sean de 90º
- 2 piezas cuyos ángulos sean obtusos
- 3 piezas cuyos ángulos sean de 30º
- 3 piezas cuyos ángulos sean de 45º
- 3 piezas cuyos ángulos sean de 60º

Una limitación de este material es que por tratarse de tiras de cartón que tienen un determinado ancho pueden distorsionar algunas figuras (por ejemplo, hacer creer que es posible construir un triángulo de medidas 3 cm, 3 cm y 6 cm). Complementariamente será importante, entonces, realizar actividades de dibujo.

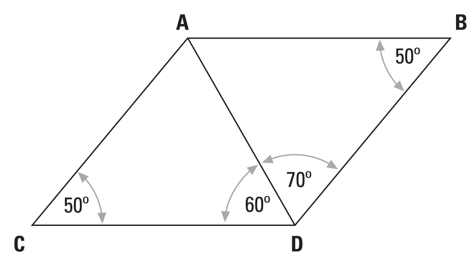
c) Sin medir con transportador, calculan las medidas de los ángulos que faltan en los siguientes triángulos. Explican y justifican sus procedimientos y respuestas.



∢x = ____



La figura muestra un rectángulo.
¿Cuánto mide ∢ y ?



En la figura ¿cuánto mide el ángulo CAB?

COMENTARIO

A partir de actividades como estas se sugiere comenzar a utilizar nomenclaturas habituales para señalar ángulos, polígonos, trazos, etc. En el caso de los ángulos, es necesario recordar que la letra central señala el vértice de éste.

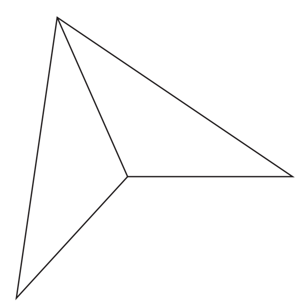
Actividad 4

Utilizan las condiciones referidas a lados y ángulos de un triángulo que determinan su construcción, para resolver situaciones que implican copiar o crear figuras geométricas. Explican y fundamentan sus procedimientos considerando las condiciones mínimas.

Ejemplo

a) Organizados en grupos buscan distintas estrategias para resolver el siguiente problema:

Se desea copiar la siguiente figura, de manera que los lados y los ángulos calcen perfectamente.



- Planifican una estrategia que permita copiar de manera exacta el dibujo. Pueden usar un compás, un transportador y una regla. No es permitido calcar la figura.
- Se presentan algunas estrategias al curso, las analizan dando cuenta de las ventajas y desventajas de ellas referidas a la fidelidad con la copia, a la facilidad de ejecución y el uso de las propiedades estudiadas anteriormente (desigualdad triangular y suma de los ángulos interiores). Establecen formas eficientes de copiar una figura.

COMENTARIO

La situación planteada es abierta y persigue enfrentar a las alumnas y alumnos a algunos problemas que generan las construcciones o copias de figuras. En el desarrollo de la actividad aparecerán las distintas formas de construir el dibujo, siendo la más probable la que pasa por dividir la figura en dos triángulos. Lo central está en que comprendan que si se copia exactamente la longitud de los trazos, los ángulos quedan determinados. Pero que también se pueden considerar trazos y ángulos al mismo tiempo. Es decir, existen variados procedimientos para hacer una copia.

A través de la copia de los segmentos usando el compás se aborda el primer tipo de construcción (basado en el teorema de congruencia LLL) y puede ser la manera más natural en que los alumnos y alumnas intenten resolver el problema. Sin embargo, la construcción que involucra los ángulos puede tardar en aparecer. Es conveniente motivar su uso a través de preguntas apropiadas.

Para orientar la exploración sistemática y la obtención de conclusiones se les puede plantear preguntas como:

¿En qué elemento del triángulo se puede centrar la atención para copiarlo? ¿Existe más de una posibilidad?, ¿basta con medir cada lado y copiarlos?, ¿qué instrumento facilita la copia de segmentos y de ángulos?, ¿cuál es la estrategia que permite copiar de manera más eficiente un triángulo?

Este es un momento adecuado para sistematizar procedimientos para copiar ángulos utilizando compás y regla y para la construcción de triángulos dadas distintas condiciones: copiar los tres lados, dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, dos ángulos y su lado común (basados en los teoremas de congruencia que serán estudiados en la Educación Media). En el Anexo 1 se muestra cómo copiar con regla y compás un ángulo y un segmento así como la construcción de triángulos.

b) A partir de dibujos de triángulos, cuyas medidas están especificadas (lados y ángulos) y trabajando en parejas, se dan instrucciones mínimas mutuamente (por turnos) para que el compañero o compañera pueda reproducir un triángulo. Repiten el ejercicios varias veces cambiando las instrucciones.

- Confrontan el triángulo dibujado por el compañero o compañera con el original. Si hay diferencias, tratan de explicarse por qué no se pudo hacer la reproducción.
- Analizan las distintas instrucciones que se fueron entregando y determinan cuál combinación de datos es la que posibilitó mejor la construcción de uno u otro triángulo.
- En un trabajo colectivo, realizan una síntesis en la cual se presentan las distintas posibilidades de combinar los datos (medidas de lados y de ángulos) que posibilitan reproducir un triángulo y establecen cuáles son las condiciones mínimas para poder realizar la reproducción.

COMENTARIO

En el punto (a) de esta actividad los alumnos y alumnas establecieron que copiando ángulos y lados podían reproducir de manera exacta un triángulo (y estudiaron las técnicas de copia de ambos elementos) o una figura compuesta por ellos. En esta parte final reflexionan sobre cuál es la mínima cantidad de condiciones (datos) que permiten copiarlo y cuáles pueden ser estos datos. Parece obvio que son tres condiciones como mínimo pero no es tan obvio saber cuáles son. Por ejemplo, si se entrega como dato sólo la medida de sus ángulos (por ejemplo 90º, 60º y 30º) se pueden construir muchos triángulos que cumplan con esa condición. En consecuencia, es necesario agregar, al menos, la longitud de uno de los lados. Situaciones como la anterior acompañadas de las preguntas de la profesora o profesor, ayudarán a los alumnos y alumnas a determinar y comprender estas condiciones.

Actividad 5

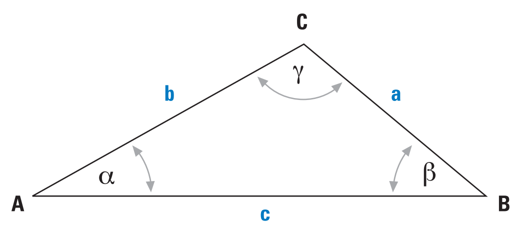
Desarrollan actividades de construcción de triángulos, a partir de ciertos datos, para establecer clasificaciones de ellos considerando tanto las características de sus lados y de sus ángulos, como las relaciones entre lados y ángulos.

Ejemplo

Organizados en grupos, construyen diferentes triángulos según condiciones como las siguientes.

Δ ABC, donde a = 3 cm, γ = 60º, b = 3 cm
Δ ABC, donde a = 5 cm, b = 5 cm, c = 5 cm
Δ ABC, donde α = 60º, c = 7 cm, β = 60º
Δ ABC, donde c = 3 cm, b = 90º, a = 3 cm
Δ ABC, donde c = 4 cm, b = 5 cm, c = 4 cm
Δ ABC, donde α = 25º, c = 3 cm, β = 25º
Δ ABC, donde a = 3 cm, γ = 45º, b = 4 cm
Δ ABC, donde a = 3 cm, b = 4 cm, c = 5 cm
Δ ABC, donde α = 20º, c = 4 cm, β = 110º

- Interpretan la información siguiendo las nominaciones habituales de lados y ángulos, como se muestra en la siguiente figura:



a) Clasifican los triángulos, de acuerdo a un criterio que considere sus características. Por ejemplo, según la longitud de sus lados, o la medida de sus ángulos, o combinaciones de ellas.

- Exponen sus clasificaciones al curso y concluyen el o los criterios que permiten clasificar los triángulos.

COMENTARIO

A través de preguntas es conveniente llevar a los niños y niñas a cuestionar y/o justificar los criterios de clasificación que los grupos hayan considerado. Es probable que criterios relacionados con los ángulos no surjan espontáneamente y sea necesario orientar su consideración a través de preguntas (si hay ángulos agudos, si todos lo son, si hay algún ángulo obtuso o rectos, etc.).

Este es un momento pertinente para introducir una clasificación tradicional de triángulos (según los lados: equiláteros, isósceles y escalenos; según los ángulos: acutángulos, obtusángulos y rectángulos) y llevar a los alumnos y alumnas a establecer un cruce entre las dos clasificaciones, con el fin de que visualicen que un mismo tipo de triángulo puede tener una doble nominación. Por ejemplo, un triángulo isósceles puede ser también rectángulo, obtusángulo o acutángulo; un triángulo escaleno puede también ser obtusángulo. Sin embargo, no existe un triángulo que sea equilátero y rectángulo al mismo tiempo. Es importante que, en este último caso, por ejemplo, se determinen claramente las razones (los tres ángulos interiores miden lo mismo, por lo tanto ninguno puede medir 90 grados).

Las medidas de los lados y de los ángulos entregadas en esta actividad fueron seleccionadas para permitir este tipo de análisis.

Es importante, también, que se analicen más detalladamente los triángulos isósceles y los equiláteros para caracterizarlos no sólo en función de la medida de sus lados sino también de sus ángulos (ángulos basales congruentes, tres ángulos de 60º, respectivamente).

b) Realizan la siguiente actividad con los triángulos equiláteros construidos anteriormente.

- Toman un triángulo equilátero y aumentan uno de sus lados en una unidad para formar un nuevo triángulo:
  ¿Sigue siendo un triángulo equilátero?
  ¿Qué modificaciones sufrieron sus ángulos?
- Repiten la actividad aumentando en dos y tres unidades uno de los lados de un triángulo equilátero.
- Contrastan sus observaciones con las observaciones y conclusiones anteriores.

COMENTARIO

En la primera parte, si toman el triángulo que tiene 3 cm, por ejemplo, obtendrán un nuevo triángulo con 2 lados de 3 y el otro de 4 cm. Se transforma en un triángulo isósceles, por lo tanto, dos de sus ángulos son de igual medida, diferente del tercero.

Al repetir la actividad, es importante que los alumnos y alumnas se den cuenta de que no se puede aumentar indefinidamente uno de los lados de un triángulo pues, si no se cumple la desigualdad triangular, no se podría construir un triángulo. Esta observación se puede orientar con preguntas adecuadas.

- Aumentan en una unidad dos de los lados del triángulo equilátero para formar un nuevo triángulo.
  Repiten esta actividad aumentando en dos y tres unidades dos de los lados.
  Los nuevos triángulos construidos, ¿siguen siendo un triángulo equilátero?, ¿por qué?
- Aumentan en una unidad o más unidades los tres lados del triángulo equilátero.
- Observan lo que ocurre con sus lados y sus ángulos. Contrastan sus observaciones con las anteriores.

- Establecen conclusiones con respecto a las condiciones que deben cumplirse al hacer variar los lados de un triángulo equilátero para que el nuevo triángulo siga siendo equilátero.

COMENTARIO

La conclusión principal, que corresponde a una conjetura porque no es demostrada de manera general, que se espera abordar es que la mantención de la igualdad de los ángulos en un triángulo requiere de la igualdad de sus lados. Esta conclusión será reforzada en contraste con las de las actividades siguientes y por las observaciones del profesor o profesora.

Es importante que alumnos y alumnas concluyan que si se aumenta en un mismo número de unidades los tres lados de un triángulo, el tipo de triángulo se mantiene. Más aún, que los triángulos serán semejantes. De esta manera se prepara el camino para la semejanza de figuras geométricas estudiada en Educación Media.

c) Analizan qué ocurre al aumentar sucesivamente un lado cualquiera de un triángulo isósceles, el lado desigual y, finalmente, ambos lados congruentes.

- Ordenan sus observaciones y obtienen conclusiones que relacionen los lados y los ángulos.

COMENTARIO

En este caso, sólo cuando se hace variar uno de los lados congruentes, el triángulo resultante deja de ser isósceles. En los otros casos se mantiene como tal pero sus ángulos varían.

d) Realizan la misma experiencia y observaciones considerando ahora triángulos rectángulos. Primero hacen variar sucesivamente la longitud de cualquiera de los catetos manteniendo el ángulo recto. ¿Qué ocurre con la longitud del otro cateto?
Luego varían sólo la longitud de la hipotenusa manteniendo fijo el ángulo recto. ¿Se mantiene la longitud de ambos catetos?

COMENTARIO

En ninguno de los casos señalados se hace una observación exhaustiva de todas las posibilidades. Tampoco se hacen demostraciones generales de los fenómenos. Por esto, las conclusiones son conjeturas y no tienen el estatus de conclusiones generales. No obstante, estas observaciones permiten, además de hacer exploraciones sistemáticas, constatar la relación estrecha que existe entre las características de los lados y de los ángulos en los triángulos, relaciones que son diferentes según el tipo de triángulo. Por ejemplo, como se señaló anteriormente, no es posible la existencia de triángulos equiláteros que no tengan los tres ángulos de igual medida. En cambio, los ángulos de triángulos rectángulos e isósceles pueden variar en función de la longitud de los lados.

- Colectivamente, sintetizan algunas conclusiones que son validadas por el profesor o la profesora.

COMENTARIO

Es importante ordenar las observaciones surgidas a lo largo de las diferentes actividades respecto de lo que sucede a cada tipo de triángulo cuando se varía la longitud de sus lados. Específicamente, deben establecer cuándo se mantiene el tipo de triángulo, según cuántos lados se modifiquen y en qué cantidad cada uno.

Este tipo de análisis prepara el camino para el estudio que se hará en Educación Media sobre la semejanza de figuras geométricas.

En el caso del triángulo rectángulo se puede pedir doblar o triplicar la longitud de los lados. Posteriormente, en la unidad de Potencias se retomará esta situación al trabajar los números pitagóricos.

Esta actividad se puede desarrollar utilizando programas computacionales que facilitan no sólo producir variaciones sino que observar de manera muy dinámica los efectos que se van produciendo. Algunos programas permiten conservar la figura inicial (es decir, se puede trabajar con copias de ella) e introducir nuevas medidas para los lados y de los ángulos, facilitando enormemente las observaciones.

Actividad 6

A partir de la modificación en redes de prismas rectos y de pirámides, estudian las alturas de triángulos, las construyen y las caracterizan.

Ejemplos

1. Disponen de un set de redes de pirámides y prismas rectos para abordar las siguientes actividades.

a) Se quiere construir un prisma recto con una mayor altura a partir de esta red (una determinada):
¿Qué elemento del prisma habría que variar para construir ese nuevo prisma recto?
¿Qué elemento específico de las caras es el que se debería modificar?

- Construyen una red para el nuevo prisma recto según lo hayan determinado en las preguntas anteriores.
- Observan sobre la red que en cada cara rectangular el lado que aumentó su longitud está en ángulo recto con respecto al lado de la base del prisma. Es decir, la altura del prisma coincide con la longitud de un lado de cada rectángulo que conforma las caras.

b) Repiten el mismo análisis anterior pero con las redes de pirámides, es decir, modifican la red de pirámides para obtener, al armarla, una pirámide de mayor altura.

- Observan que, en este caso y a diferencia de lo que ocurre con los prismas rectos, la altura del triángulo no coincide con la altura de la pirámide y, por lo tanto, tampoco coincide con los lados del triángulo. Es decir, si modifican, por ejemplo, la altura de cada triángulo en 2 cm, la altura de la pirámide no aumentará en esa misma medida.

- Discuten y buscan responder la pregunta siguiente: ¿Existe algún triángulo en el cual la altura coincida con un lado?

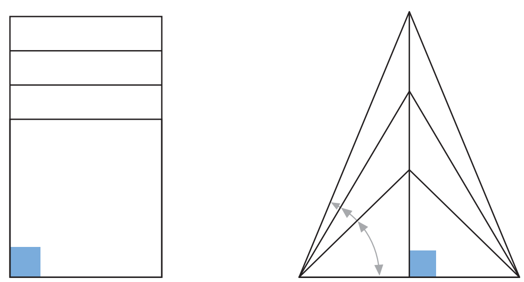
COMENTARIO

Las preguntas que tienen relación con la modificación de la altura de pirámides están orientadas para que asocien el “alargamiento” del triángulo de la cara lateral con la modificación de la altura del triángulo. Es importante diferenciar la altura del cuerpo de la altura de cada uno de los rectángulos y/o triángulos presentes en las caras laterales.

Al comparar los procedimientos empleados en las caras laterales de los prismas y las pirámides para aumentar la altura de los cuerpos, es importante destacar el elemento que se varió, tanto en los rectángulos como en los triángulos. En ambos casos se hace variar la altura (que en el rectángulo coincide con su lado). En este caso, la altura forma un ángulo recto con la base del prisma recto tanto en la red como en el cuerpo armado. En el caso de las pirámides el ángulo recto lo forma en la red pero no cuando el cuerpo está armado.

Se sugiere que el profesor o profesora introduzca, a partir de esta actividad, la noción de altura en un triángulo y la enseñe a dibujar. Ver Anexo 1.

Otro efecto importante provocado en las caras laterales de ambos tipos de cuerpos al aumentar su altura, se da al observar respectivamente las caras rectangulares y triangulares antes y después del aumento de su altura. Mientras en los rectángulos la figura sólo cambia en la longitud de dos lados, en los triángulos, además de aumentar la longitud de dos lados, se modifican los ángulos basales.



c) Trabajando en grupo y con un set de triángulos diferentes, trazan con escuadra las alturas de cada uno de ellos (ver Anexo 1) remarcándolas con un mismo color.

- Comparan la ubicación de ellas en los diferentes tipos de triángulo, la diferencia de procedimientos en un caso y otro y discuten las dificultades para dibujarlas. Hacen una clasificación de estos triángulos de acuerdo a algún criterio relacionado con la ubicación de las alturas. Establecen conclusiones.

- Determinan y caracterizan el punto de intersección de las alturas en cada triángulo. Asocian la ubicación de dicho punto y el tipo de triángulo de que se trata.

COMENTARIO

Es muy importante que se entreguen distintos tipos de triángulos a cada grupo, preocupándose de cubrir las clasificaciones que toman como criterio tanto la longitud de los lados como la medida de los ángulos interiores. Esto ayudará al análisis posterior de manera de obtener conclusiones generales respecto de la ubicación de las alturas según las características de los triángulos.

En el Anexo 1 aparece la forma de dibujar las alturas.

En la construcción de las alturas hay que poner especial atención cuando es necesario prolongar el lado correspondiente a la altura en los ángulos obtusos. También, a las características que tienen las alturas construidas desde los catetos en los triángulos rectángulos porque, al principio, no las perciben como coincidente con los lados del ángulo recto.

Un criterio de clasificación puede ser: triángulos donde todas las alturas se ubican al interior del triángulo; triángulos en los cuales una altura se ubica al exterior del triángulo y triángulos en los que la altura se ubica en un vértice. Complementariamente, se puede preguntar si existe algún tipo de triángulo en que las tres alturas queden en el exterior, por ejemplo. Esto último, para enriquecer lo que es parte del foco en esta unidad: conocer en profundidad las características de los triángulos en función de sus elementos primarios y algunos elementos secundarios.

Actividad 7

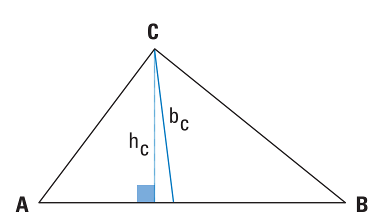
Analizan distintos tipos de triángulos en función de las bisectrices de sus ángulos, estableciendo relaciones con sus ejes de simetría y sus alturas.

Ejemplo

a) Usando los mismos triángulos anteriores, trazan con regla y compás las bisectrices de sus ángulos interiores (ver Anexo 1 para la construcción de bisectrices). Las remarcan con un color diferente al usado en las alturas.

- Caracterizan las bisectrices. Comparan las alturas y las bisectrices en cada triángulo.
  Determinan en cuáles casos coinciden y vuelven a clasificar los triángulos de acuerdo a lo observado. Escriben sus observaciones. Presentan su conclusiones al curso y las redactan.

- Resuelven situaciones como la siguiente:
  Si sólo puedes desplazar los vértices, ¿qué movimiento realizarías en este triángulo si deseas que la altura (h_c) y la bisectriz (b_c) señaladas coincidan?



- Determinan y caracterizan el punto de intersección de las bisectrices en diferentes tipos de triángulo.

COMENTARIO

Se sugiere completar una tabla como la siguiente con el resumen de las observaciones, agregando comentarios y conclusiones.

	Bisectrices en un triángulo			**Alturas en un triángulo**		
	acutángulo	**rectángulo**	**obtusángulo**	**acutángulo**	**rectángulo**	**obtusángulo**
Comentarios sobre la construcción						
Lugar en el cuals se ubica la intersección						
Coincidencia entre las bisectrices y las alturas						
Comentarios y conclusiones						

La tabla presenta una misma clasificación de triángulos tanto para el análisis de bisectrices como de alturas, sólo con fines comparativos. Sin embargo, es muy importante que se subclasifiquen. Sin duda, lo más interesante es que en torno a la coincidencia entre alturas y bisectrices concluyan lo que sucede en los triángulos equiláteros e isósceles. Al mismo tiempo, en el caso de las alturas, que se den cuenta que no importando si el triángulo es isósceles o escaleno, basta que el triángulo sea obtusángulo para que la construcción implique prolongar un lado (el opuesto al ángulo obtuso).

Este efecto se visualiza claramente al usar transparencias, si en una hoja se construyen las alturas, en otra las tres bisectrices de triángulos congruentes y luego se superponen ambos triángulos.

El desafío presentado al final de la actividad tiene como objetivo visualizar las figuras en forma más dinámica, en la cual la solución al problema no es única debido a que los vértices se pueden desplazar en distintos sentidos hasta lograr que el triángulo formado sea equilátero o isósceles. Es necesario recordar que en el triángulo isósceles sólo una de las tres bisectrices coincide con una de las alturas (la bisectriz que corresponde al ángulo opuesto a la base del triángulo isósceles).

En cuanto al punto de intersección de las bisectrices, se puede trazar la circunferencia inscrita al triángulo cuyo centro es ese punto para poner de relieve que las bisectrices, en cualquier tipo de triángulo, se ubican siempre al interior del mismo, a diferencia de las alturas.

b) Sabiendo que las bisectrices dimidian un ángulo, exploran cómo se puede obtener una bisectriz a través de un doblez, para observar su relación con los lados del triángulo y determinar en cuáles casos corresponden a ejes de simetría. Para esto calcan distintos tipos de triángulos y las respectivas bisectrices de los ángulos interiores, recortan las copias y doblan el triángulo por el trazo marcado por la bisectriz.

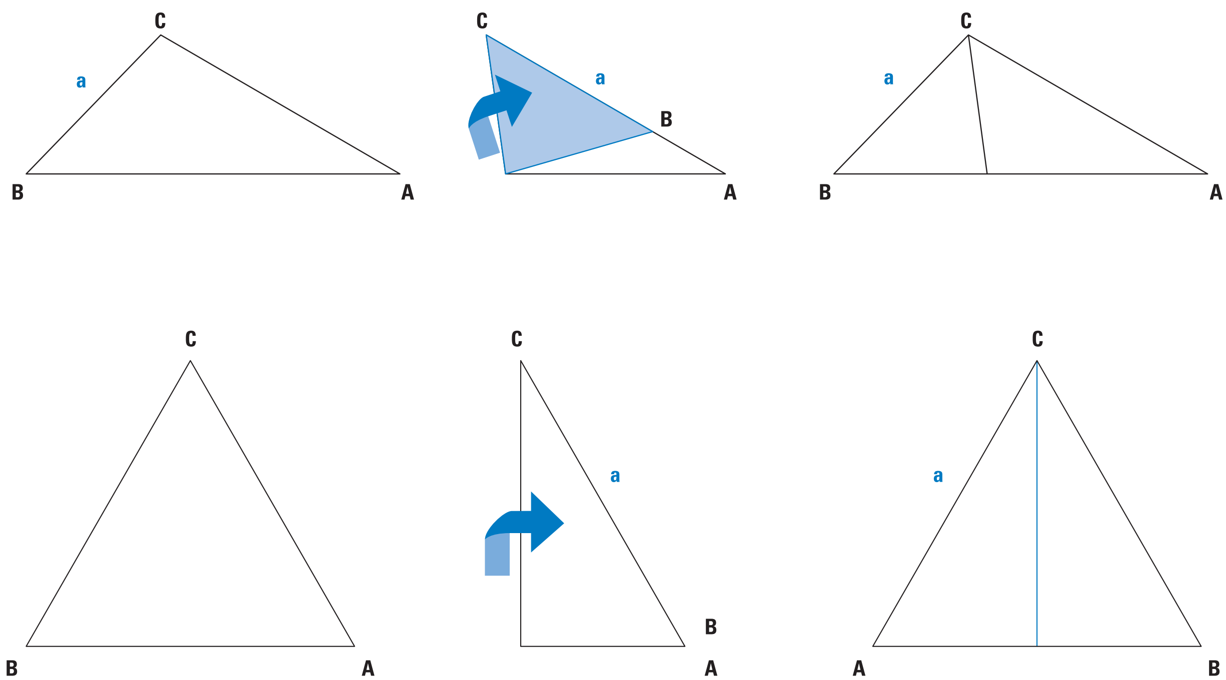
- Observan lo que sucede a partir de preguntas como: ¿qué elementos del triángulo coinciden?, ¿un lado?, ¿un vértice?, ¿ambos?

- Realizan una síntesis de la actividad anterior. Para ello pueden completar una tabla que indique en qué tipos de triángulos la bisectriz corresponde a un eje de simetría, y si esto sucede en todos los ángulos interiores o sólo en algunos. En este caso identificar cuáles. Establecen esta misma relación con las alturas de los triángulos.

COMENTARIO

En cursos anteriores niños y niñas trabajaron con los ejes de simetría en distintas figuras geométricas utilizando espejos y dobleces. Ahora el foco está centrado en los triángulos, las bisectrices y alturas.

Complementariamente se puede proponer que, por medio de un doblez, determinen la bisectriz de un ángulo interior. Esto es simple y ayuda a centrar la noción de bisectriz como el trazo que divide en dos partes iguales al ángulo interior de un triángulo, por ello el doblez se inicia en el vértice (ángulo formado en ése vértice) y no en algún lado (puede suceder que tiendan a confundirse y creer que la bisectriz parte del punto medio de un lado). Para reafirmar esta distinción conviene hacer observar en qué punto intersecta la bisectriz al lado, lo cual al doblarlo queda en evidencia. **Sólo cuando la bisectriz es eje de simetría coincide el punto de intersección con el punto medio del lado opuesto,** como se muestra en el ejemplo.



El otro aspecto interesante es observar qué sucede con las bisectrices en los triángulos equiláteros e isósceles. Al doblar un triángulo equilátero por sus bisectrices, los lados y los vértices coinciden.

Un procedimiento que pueden usar para comprobar que el doblez determina efectivamente una bisectriz es medir con transportador cada ángulo generado y verificar que son iguales y que corresponden, cada uno, a la mitad del ángulo interior considerado; o bien, trazando la bisectriz con regla y compás según lo aprendido.

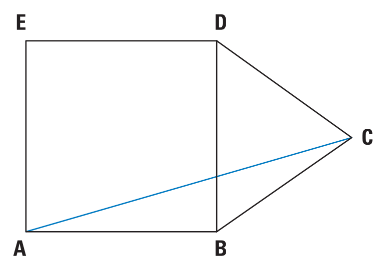
Actividad 8

Aplican las características de diferentes tipos de triángulos, de sus alturas y bisectrices para resolver problemas geométricos.

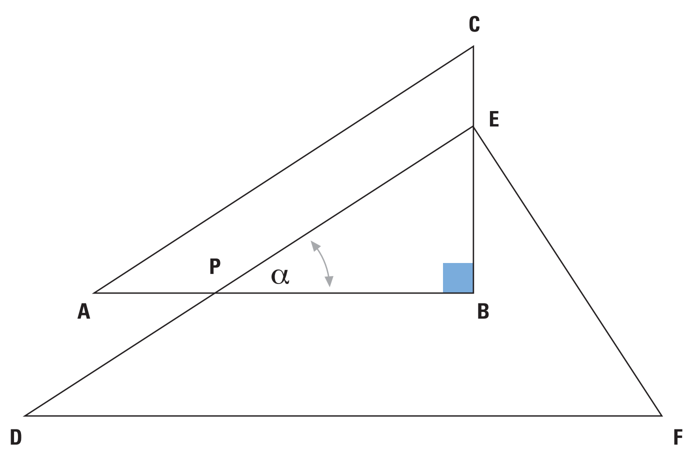
Ejemplo

En parejas, resuelvan problemas geométricos como los siguientes, aplicando las conclusiones referidas a características de los triángulos, las alturas y bisectrices, estudiadas anteriormente:

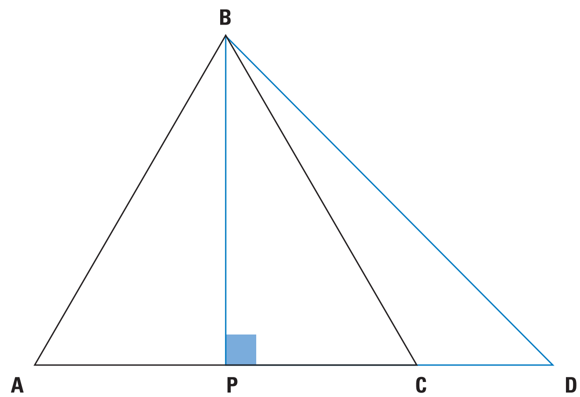
a) ABDE es un cuadrado. BCD es un triángulo equilátero. Sin medir, ¿podrías encontrar el valor del ángulo CAB y explicar por qué llegas a ese resultado?



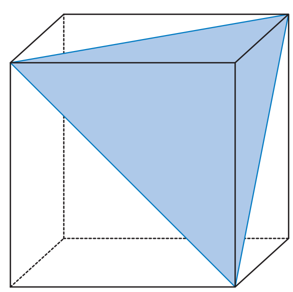
b) ABC y DEF son triángulos rectángulos en B y en E, respectivamente; ángulo BEF = 30º. Sin medir los ángulos, encuentra el valor del ángulo α y explica por qué llegas a ese resultado.



c) ABC es un triángulo equilátero y BPD es un triángulo rectángulo-isósceles. Sin medir los ángulos, encuentra el valor del ángulo CBD y explica cómo llegas a ese resultado.



d) ¿Qué tipo de triángulo es el que forman las diagonales de las caras del cubo que muestra la figura? Justifica tu respuesta.



COMENTARIO

Con esta actividad se pretende que los alumnos y las alumnas hagan una síntesis sobre lo que se ha trabajado anteriormente respecto de los triángulos (y de otras figuras conocidas) utilizando las conclusiones que permiten relacionar los diferentes elementos e incorporando mediciones en la resolución de problemas. Es conveniente entregar estos problemas y, posteriormente, hacer una síntesis colectiva en la que se discutan las propiedades utilizadas a partir de las argumentaciones que los alumnos y alumnas desarrollen.

Actividad 9

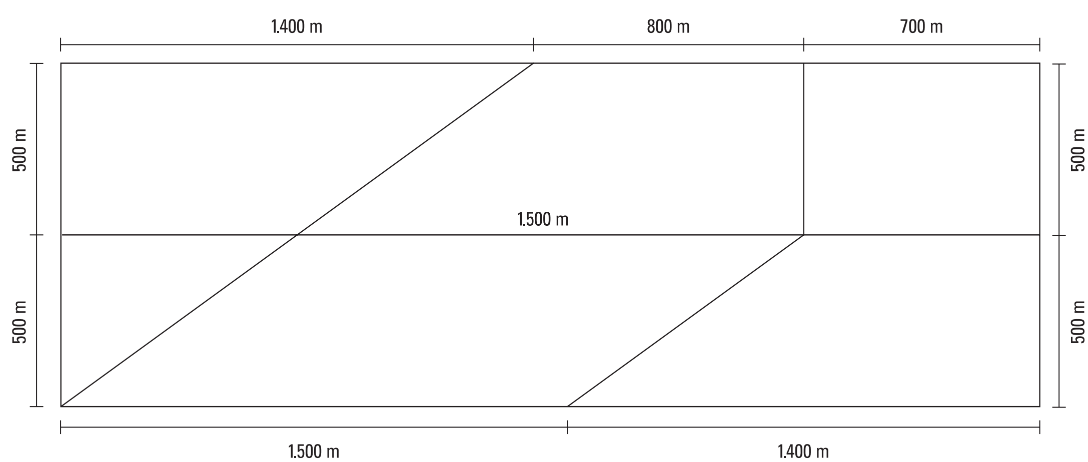
Resuelven situaciones problema que involucran cálculo de área de triángulos rectángulos y otros. Identifican altura y base correspondiente para establecer relaciones entre estas medidas y el área.

Ejemplo

Leen y comentan la siguiente situación. Luego diseñan estrategias para resolver el problema, las discuten y, orientados por preguntas, establecen conclusiones acerca de los procedimientos para calcular el área de triángulos.

Varios campesinos desean vender sus terrenos colindantes, que tienen formas muy curiosas, y quieren averiguar cuál de las parcelas puede tener el mayor precio considerando que han acordado cobrar el mismo precio por m^2.

Si este es un plano esquemático del terreno con cada una de las parcelas, ¿cuál es la conclusión a la que llegan los campesinos?



- Analizan la situación y la resuelven a partir de preguntas como:
  En el caso de los triángulos ¿qué datos son los que ayudan a calcular su área?
  ¿Qué tipo de triángulos son los presentes en los terrenos?
  ¿Recuerdan el procedimiento utilizado en 6º Año Básico para calcular áreas de triángulos rectángulos? (Asociado a las medidas de una altura y la base correspondiente a esa altura).
  ¿Sirve este procedimiento para cualquier triángulo? Exploran trabajando con diferentes tipos de triángulos, relacionando cada uno de ellos con rectángulos y recortando las partes necesarias del triángulo de modo que se inscriba en la mitad de un cuadrado o rectángulo.

- Concluyen un procedimiento general para calcular el área de cualquier triángulo.
- Investigan y comentan sobre la forma de calcular el área de terrenos irregulares y respecto de cómo se usa, habitualmente, la expresión "cuadrar un terreno."

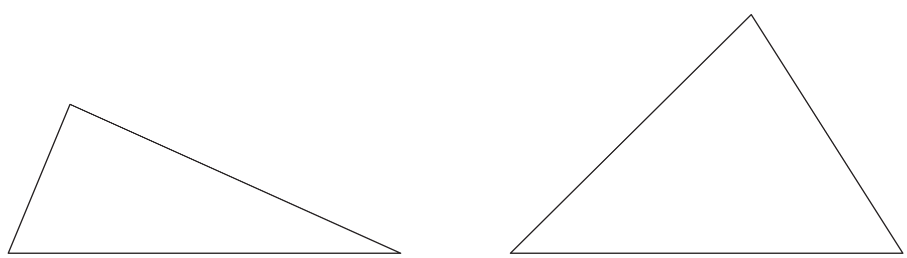
COMENTARIO

Un procedimiento muy usado para calcular áreas de terrenos es la subdivisión en polígonos conocidos que permitan calcular su área con relativa facilidad. En el ejemplo anterior se presentan algunas formas como el romboide y el trapecio, que se pueden subdividir para obtener sólo triángulos rectángulos y rectángulos.

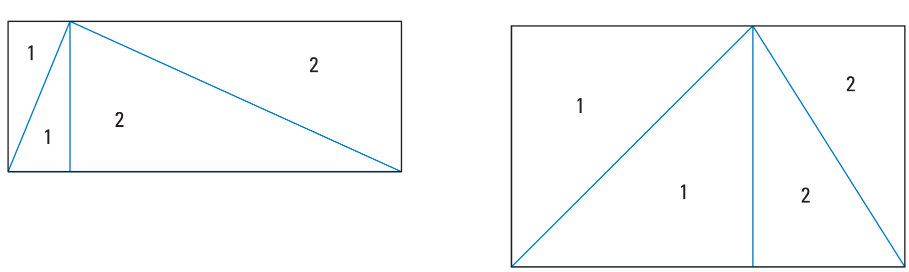
El cálculo de áreas de triángulos rectángulos es conocida por las niñas y niños desde el nivel anterior. En esta situación se pretende abordar la pregunta respecto de la validez de dicho procedimiento para calcular el área de cualquier triángulo.

Para realizar la actividad es necesario preparar un set con triángulos diferentes (al menos un acutángulo y un obtusángulo) para recortar y comprobar de manera concreta que el área del triángulo, aunque no sea rectángulo, siempre equivale a la mitad del área de un rectángulo o cuadrado correspondiente (de igual base y altura).

A continuación se presentan dos modelos:



A partir de los triángulos y recortando convenientemente, se completa un rectángulo (como en la figura siguiente) y se puede comprobar con facilidad que el área del triángulo inicial es igual a la mitad del rectángulo correspondiente. La profesora o profesor puede incorporar un procedimiento de comprobación general



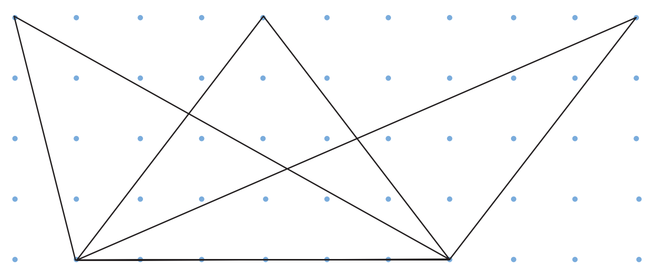
Actividad 10

Investigan familias de triángulos que se generan al desplazar una altura de un primer triángulo y mantener la base correspondiente (es decir, tienen todos igual base y altura). Establecen conclusiones respecto de sus áreas y perímetros. Comprueban sus conclusiones.

Ejemplo

Organizados en grupos, utilizando un geoplano o una red de puntos, estudian familias de triángulos que se van generando al desplazar la altura en forma perpendicular al lado correspondiente (considerado como la base del triángulo) o a una extensión del lado.

- Analizan la relación entre las áreas de los triángulos construidos y también entre los perímetros, a partir de sus construcciones en el geoplano o de dibujos en redes de puntos como los siguientes:



Se orientan por preguntas como:
¿Cómo se podría comparar el área del primer triángulo y la del que en el geoplano (o dibujo) tiene lados más largos?

- Eligen los dos triángulos que les parecen menos parecidos y calculan tanto sus áreas como sus perímetros. Eligen otros y repiten sus cálculos.

COMENTARIO

Para calcular las áreas, se toma como unidad de longitud la distancia entre dos clavos (vertical u horizontalmente, no en diagonal) y como unidad de superficie el cuadrado generado por 4 clavos (es decir, de una unidad de longitud por lado). En el dibujo, la altura de los triángulos mide 4 unidades y la base mide 6 unidades. Para medir los perímetros pueden utilizar un hilo.

- Imaginan un triángulo cuyo vértice superior esté mucho más alejado (incluso más allá del geoplano o del dibujo). Discuten sobre cuál sería su área y cómo sería su perímetro, comparado con los que están a la vista (en el geoplano o en el dibujo).

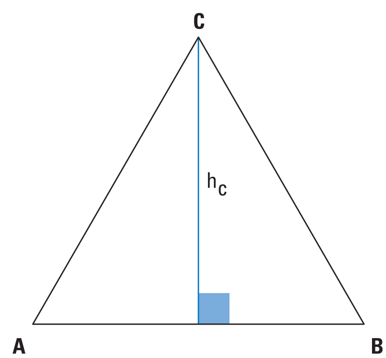
- Explican por qué se puede afirmar que dos triángulos cualesquiera que tienen igual altura e igual base tienen igual área pero no igual perímetro.

COMENTARIO

Para orientar el análisis se sugiere:

- Completar una tabla que indique para cada triángulo datos tales como: base, altura, área, perímetro.
- Observar que para un mismo valor (longitud) de la base y altura (en triángulos diferentes) se obtiene una misma área pero distintos perímetros.

Se hace especial énfasis en la expresión "altura y base correspondiente," porque este es un requisito para calcular el área. En el caso de tener como datos sólo la altura hc y la base AC (ver dibujo), no es posible calcular el área de dicho triángulo. Se sugiere realizar actividades complementarias para que las alumnas y alumnos decidan en qué casos es posible calcular el área dados algunos datos o qué datos específicos necesitan para calcular el área de un triángulo dado.



Actividad 11

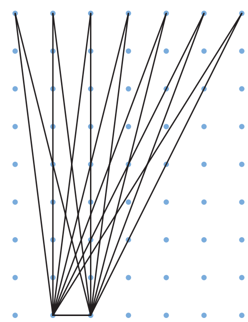
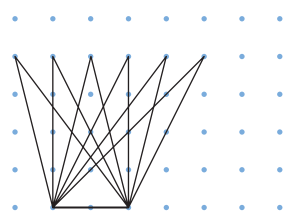
Encuentran familias de triángulos que tienen igual área, no obstante tener base y altura diferente. Establecen una fórmula general que permita encontrar todos aquellos triángulos de una determinada área.

Ejemplo

a) Organizados en grupos construyen en el geoplano, o dibujan en una red de puntos, triángulos que cumplan las siguientes condiciones:

Triángulos en los que la base mida 1 unidad y la altura correspondiente, 8 unidades.
Triángulos en los que la base mida 8 unidades y la altura correspondiente, 1 unidad.
Triángulos en los que una base sea de 2 unidades y la altura correspondiente, de 4 unidades.
Triángulos en los que una base mida 4 unidades y la altura correspondiente, 2 unidades.

- Construyen una tabla como la siguiente para organizar los datos y los resultados obtenidos al calcular el área de los triángulos pertenecientes a cada una de las familias.

Base	Altura	Área	Dibujo de los triángulos	Conclusiones
1 u *	8 u	4 u^2		Todos estos triángulos tienen igual área
2 u	4 u	4 u^2		
8 u	1 u			
4 u	2 u			

*Nota: u significa unidades y $\mathbf{u^2}$ se refiere a unidades cuadradas.

- Preguntas sugeridas para el estudio de casos particulares (de cada familia de triángulos):
  ¿Cuántos triángulos se pueden formar en cada caso?
  ¿Existen más triángulos que cumplan esa condición de base y altura y que no hayan podido construir en el geoplano, en cada caso? ¿Cuántos?

  Explican sus respuestas:
  ¿Qué relación existe entre las áreas de estos triángulos?
  ¿Qué elementos tienen en común estos triángulos?

- Preguntas para el estudio general, que permitan relacionar las diferentes familias: ¿Qué tienen en común estas diferentes familias de triángulos?

  Determinan otra familia de triángulos que cumpla con la condición común.

  ¿Podría ser, por ejemplo, una cuya base mida 12 unidades y la altura mida $\frac{2}{3}$ de unidad?

COMENTARIO

Las conclusiones principales que se pretende que surjan tienen relación con la ampliación del caso particular abordado en la actividad anterior (triángulos que tienen igual base y altura y por tanto igual área) a una "gran familia" de triángulos, los que, no importando su forma, tienen igual área porque el producto de la longitud de la base por la altura es el mismo.

Es interesante hacer reflexionar a las alumnas y alumnos respecto de:

- la cantidad de triángulos de igual base y altura que se pueden construir, que es eventualmente infinita si se consideran no sólo los números naturales. Analizar la limitación del geoplano para mostrarlos, en relación a la cantidad reducida de clavos y a la imposibilidad de considerar ubicaciones entre dos clavos;
- los triángulos en los que el producto de la base y altura es constante; específicamente, sobre la diferencia que se produce si se elige uno u otro valor como base y la semejanza que existe respecto a que tienen igual área. Por ejemplo, estudiar las diferencias entre los triángulos de base 1 unidad y altura 8 unidades y los triángulos de base 8 unidades y altura 1 unidad.

b) Investigan las familias de triángulos cuya área sea igual, apoyándose del geoplano u otro material que permita una representación.

- Si el área de un triángulo es igual a, por ejemplo, 36 cm^2. ¿Se puede afirmar que todos los triángulos cuyo producto entre la longitud de la base y la longitud de la altura es igual a 72 pertenecen a la misma familia de triángulos (o sea, que tienen, en este caso área igual a 36 cm^2)?
- Escriben una fórmula general para el caso de triángulos cuya área sea igual a "**n** cm^2".
- Caracterizan cada familia de triángulos encontrada, en relación a la base y altura. Buscan formas de presentar en forma clara los hallazgos. Redactan conclusiones.
- Cada grupo presenta al curso una familia de triángulos y sus conclusiones.

COMENTARIO

Esta segunda parte del ejemplo (b) pretende que las alumnas y alumnos realicen un proceso inverso a la primera (a). A diferencia del caso anterior, aquí se entrega el valor del área y se pide encontrar los triángulos que tengan esa área, cuyo proceso implica descubrir que el producto entre la base y la altura debe ser el doble del área. A su vez, es una actividad que permite observar si las alumnas y los alumnos han comprendido cabalmente la actividad (a). Es importante, a modo de síntesis, revisar la fórmula general para encontrar el área de un triángulo cualquiera.

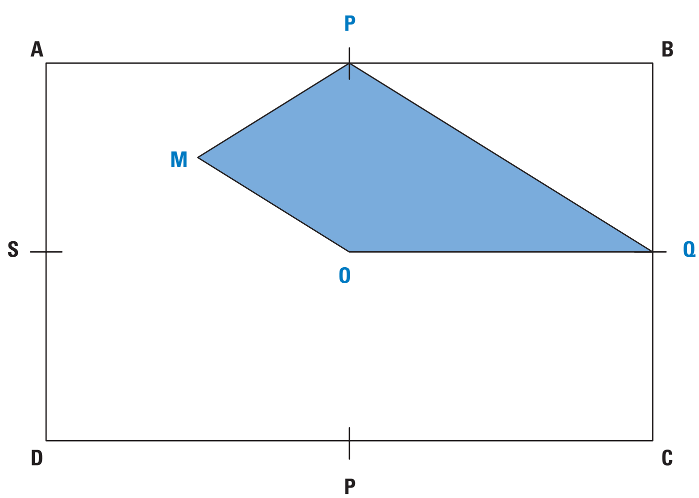
Actividad 12

Resuelven problemas que involucren calcular áreas y perímetros de triángulos, recurriendo a las características de los triángulos y las relaciones entre sus elementos.

Ejemplos

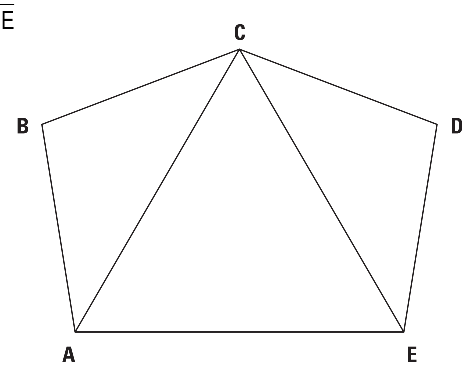
1. **Calcular el área del cuadrilátero PMOQ.**
   En el rectángulo ABCD de la figura, $\overline{AD}$ = 6 cm y $\overline{DC}$ = 8 cm.

   P, Q, R y S son los puntos medios de los lados.
   Las diagonales del rectángulo ABCD se cortan en el punto O y las diagonales del rectángulos APOS se cortan en el punto M, como se muestra en la figura.

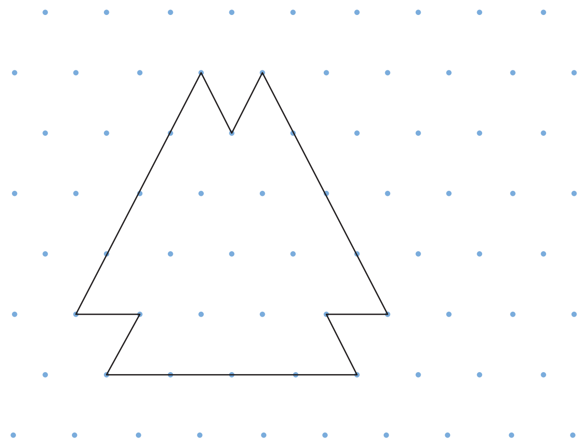


2. **Calcular el perímetro del pentágono ABCDE.**

   El triángulo ACE es equilátero y su perímetro es igual a 18 cm.
   Los triángulos ABC y CDE son isósceles congruentes de 14 cm de perímetro.
   $\overline{AB} = \overline{BC}$ y $\overline{CD} = \overline{DE}$



3. ¿Cuántos metros de alambre se necesitan para cercar esta superficie?



COMENTARIO

Esta actividad de síntesis puede requerir apoyar a los alumnos y alumnas para que encuentren las relaciones apropiadas que permiten resolverlas. Ellas tienen relación con varias de las actividades anteriores. Por esta razón permite observar eventuales dificultades o aspectos que no hayan sido comprendidos suficientemente.

Actividades de evaluación

A continuación se proponen algunas actividades y problemas para la evaluación de los aprendizajes esperados de la unidad y que pueden ser incorporadas en su plan de evaluación, incluyendo pruebas. Algunas de las actividades están diseñadas para ser trabajadas en grupo.

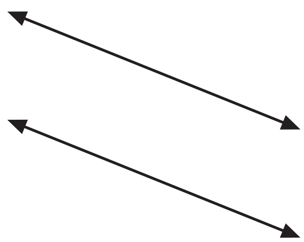
En la columna de la derecha se especifican algunos indicadores que orientan las observaciones del logro de los aprendizajes.

Ejemplos de actividades y problemas	Indicadores / Observar que:
Completan, dibujando con regla y compás, una red de prisma o pirámide si se entrega la base.	
Ejemplo Dado un pentágono regular, construyen con regla y compás dos redes de pirámides que se diferencien en la altura de las caras laterales.	• Asocian el número de lados de la base de un cuerpo con el número de caras de éste.
a) Previamente a la construcción: • Describen las características de las caras laterales y las relaciones entre ellas y la base que aseguran la posibilidad de construir el cuerpo correspondiente.	• Describen las caras como triángulos isósceles, congruentes entre sí y cuya base debe coincidir con la longitud del lado de la base del cuerpo correspondiente.
• ¿Qué modificarías en la red de esta pirámide para construir una segunda de mayor altura? Explica por qué.	• Explican, refiriéndose a modificaciones en la altura de los triángulos que forman las caras laterales. Justifican por qué es suficiente. • Usan la regla y el compás adecuadamente.
b) Hacen los dibujos y comprueban construyendo las pirámides.	• Las redes permiten efectivamente armar los cuerpos correspondientes.

Establecen condiciones para que un conjunto de triángulos tengan igual área.

Ejemplo

Dibuja tres triángulos de igual área entre estas rectas paralelas y responde las preguntas siguientes:



- Explica por qué puedes asegurar que sus áreas son iguales.
- Explica la condición mínima que deben cumplir dos triángulos cualesquiera para que tengan igual área.

- Dibujan triángulos de igual base y altura o de diferente base y altura pero cuyo producto es constante (igual).
- Identifican que la condición básica y general para que dos triángulos tengan igual área es que el producto del valor de la altura por el de la base sea igual en ambos.

Deciden si es posible construir o completar un triángulo dados ciertos lados, ángulos y/o elementos secundarios como las alturas y/o bisectrices.

Ejemplos

1. Leen las siguientes informaciones y deciden en qué casos es posible o no es posible construir el triángulo. Justifican su respuesta.

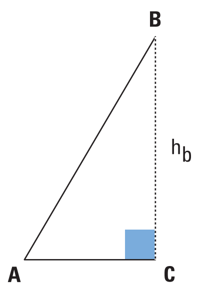
- Un triángulo cuyos lados midan: 3 cm, 4 cm, 5 cm.
- Un triángulo cuyos lados midan: 10 cm, 4 cm, 4 cm.
- Un triángulo equilátero en el cual la medida de cada lado sea de 12 cm.
- Un triángulo rectángulo en el cual los ángulos no rectos midan 50° y 60°.
- Un triángulo isósceles cuyos ángulos basales midan 45° y el otro sea recto.
- Un triángulo cuyos lados midan: 7 cm, 4 cm, 3 cm.

- En sus justificaciones se refieren a la desigualdad triangular y/o a la suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera, según corresponda.

2. Analizan los siguientes dibujos y la información que se da en cada uno y responden:
¿Se podría completar el triángulo solamente con esa información, es decir, se puede determinar dónde ubicar el vértice que falta?

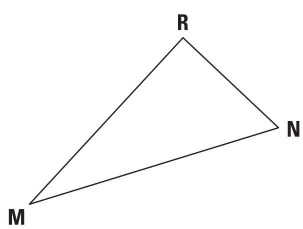
- En el dibujo, falta el vértice C para completar el triángulo isósceles ABC, cuyos lados congruentes son AB y BC.

  El trazo h_b es una altura y, a la vez, un eje de simetría.



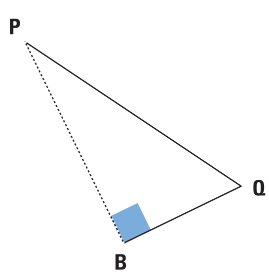
- Reconocen que la información es suficiente para dibujar el otro vértice faltante, ya que el triángulo debe ser isósceles (porque la altura desde el vértice opuesto a la base es eje de simetría o porque los lados señalados son iguales).

- En el dibujo falta el vértice T para formar el triángulo equilátero MRT. El trazo MN es bisectriz del ángulo RMT del triángulo equilátero.



- Reconocen que la información es suficiente para dibujar el otro vértice faltante porque cualquier bisectriz de un triángulo equilátero es eje de simetría.

- En el dibujo falta el vértice O del triángulo escaleno OPQ.
  El trazo PB es altura.



- Reconocen que la información es insuficiente para dibujar el vértice faltante porque la altura de un triángulo escaleno no es eje de simetría. El vértice O está en alguna parte de la prolongación de BQ pero no se puede determinar dónde.

Unidad 3

Sistemas de numeración en la historia y actuales

TIEMPO ESTIMADO: 4-5 SEMANAS

Contenidos

- Comparación de la escritura de los números en el sistema decimal con la de otros sistemas de numeración en cuanto al valor posicional y a la base (por ejemplo, egipcio, romano, maya).
- Comparación de la escritura de números, hasta 100, en base diez y en base dos (sistema binario).

Aprendizajes esperados

Las alumnas y los alumnos:

- Valoran los sistemas de numeración como instrumentos útiles y necesarios para contar, expresar y comunicar cantidades.
- Comprenden que el sistema de numeración decimal es convencional, que tiene una larga historia y no es el único sistema que ha existido.
- Conocen otros sistemas de numeración, sus usos en otras culturas, sus usos actuales.
- Determinan reglas de combinación para escribir diferentes números, con un conjunto limitado de símbolos.
- Caracterizan el sistema de numeración decimal en función del principio de posición, la base diez y la existencia del cero.

Orientaciones didácticas

Esta unidad puede ser trabajada en cualquier momento del año. Se trata de motivar a los alumnos y alumnas a tomar conciencia de la existencia de diversos sistemas de numeración, de que el usado habitualmente, y desde hace mucho, corresponde a una convención. Es decir, nuestro sistema de numeración podría ser diferente, al igual que nuestro sistema de escritura o el que se utiliza para registrar la música.

Por otro lado, es importante que profundicen en las razones por las cuales los sistemas son creados: la necesidad de contar, de registrar información numérica y, sobre todo, de comunicarla.

La unidad propone, centralmente, actividades de investigación en la historia, las que pueden realizarse en coordinación con el subsector Estudio y Comprensión de la Sociedad. Es importante señalar que no necesariamente deben realizarse como trabajos extra clase, en la casa, sino que, es interesante que sean realizadas durante ella o en otros tiempos escolares. De este modo no significan una sobrecarga de trabajo extra escolar y posibilitan que los niños y niñas puedan, efectivamente, trabajar en grupos, y aprender a desarrollar procesos de investigación (búsqueda de información en textos escritos o computacionales, en entrevistas; organización y análisis de la información; formulación de conclusiones; comunicación).

Es importante que los niños y niñas comprendan como una construcción humana y en un sentido histórico los sistemas de numeración. No obstante, no pueden quedarse con una idea de que éstos, exceptuando el decimal, estarían en desuso y forman parte de un pasado remoto. En este sentido se resalta el uso en algunos contextos, por ejemplo, de los números romanos; el uso actual en algunas regiones de sistemas en base veinte (algunos pueblos mayas, habitantes en diversos países de América Central, utilizan, al menos de forma oral, su sistema ancestral de numeración); y, finalmente, las relaciones entre el sistema de numeración binario y el lenguaje binario utilizado en las calculadoras y las computadoras.

En relación muy directa con temas que se incorporan en el curso siguiente, NB6, las actividades apuntan a que se profundice la comprensión de las principales características del sistema de numeración decimal: el principio de posición, la base diez y la existencia del cero. No se trata, entonces, en contraposición a contenidos similares que se incorporaban tempranamente en la Educación Básica (a nivel de tercero o cuarto), de centrar la atención en la traducción mecánica de cifras de una base a otra.

A través de las actividades propuestas se pretende, además, motivar y orientar a los niños y niñas para que desarrollen procesos sistemáticos de análisis, investiguen y comuniquen informaciones. Para ello deben contar con el apoyo permanente de su profesor o profesora, quien deberá proponer preguntas adecuadas, poner a su disposición información oportuna y orientarles para obtener conclusiones, apoyados por sus propias recapitulaciones.

Actividades de aprendizaje

Actividad 1

Analizan diversas formas de expresar cantidades y diversos sistemas de numeración utilizados a lo largo de la historia, asociándolos a la necesidad de registrar, expresar y comunicar cantidades. Los comparan en cuanto a sus símbolos y reglas.

Ejemplo

Trabajando en grupos, investigan en fuentes bibliográficas sobre algunas formas de expresar cantidades o sistemas de numeración (uno cada grupo) que se hayan utilizado o se utilicen actualmente en diversas culturas. Pueden investigar la forma de expresar cantidades usadas por el pueblo mapuche, por los mayas, los números romanos.

- Registran las informaciones recopiladas y elaboran un informe.
- Comparten en la clase las informaciones y hacen una síntesis. Pueden utilizar una tabla como la siguiente:

Ubicación geográfica	Epoca	Símbolos y equivalencias con el sistema decimal	Reglas y ejemplos

- Comentan sobre las diferencias y semejanzas entre ellos. Evalúan algunos aspectos tales como la economía en la escritura de grandes cantidades.

COMENTARIO

Al comparar los diferentes sistemas se sugiere abordar el número de símbolos empleados en la escritura de una misma cantidad y tratar de imaginar las facilidades o dificultades para la realización de operaciones como suma o multiplicación.

La idea no es que realicen estos cálculos sino que los visualicen, y puedan apreciar las diferencias (en los sistemas de carácter agregativo, como el romano o el egipcio, los cálculos resultan, para quienes están habituados al sistema de numeración decimal, algo engorrosos).

Esta investigación se presta para realizar un trabajo interdisciplinario con Estudio y Comprensión de la Sociedad, pues los contenidos de este mismo nivel abordan el estudio de las civilizaciones mediterráneas.

Algunos sitios en internet que pueden utilizarse para apoyar el desarrollo de las actividades son:
Sistema numérico de la cultura maya: **www.ave.edu.co/grado06/matematicas/sesion1.htm**
Las matemáticas en el antiguo Egipto: este sitio presenta en forma cronológica los avances de los egipcios en el área de las matemáticas: **http://members.xoom.com/egipto/ciencia/cardinales.htm**

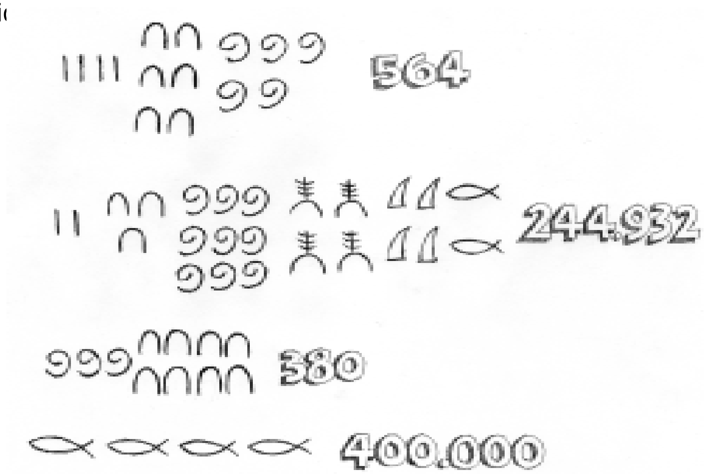
Actividad 2

Discuten la idea de base, el principio de posición y el rol del cero a partir del análisis de diferentes sistemas de numeración desarrollados en la historia.

Ejemplos

1. **Descifran el valor de los diferentes símbolos utilizados en el sistema jeroglífico de los egipcios, de los babilonios y en el decimal actual.**

a) Leen y discuten las siguientes representaciones de números en el sistema jeroglífico utilizado por los antiguos egipci



- Observando los dos primeros números:

  ¿Qué valor tiene cada |? ¿Qué valor tiene cada ∩?
- Determinan, comparando con el sistema de numeración decimal actual, el valor de cada uno de los símbolos.
- Escriben su fecha de nacimiento utilizando estos signos.

COMENTARIO

En esta actividad, lo central está en que los niños y niñas determinen el valor de cada símbolo y, en particular, que se den cuenta de que ellos **pueden ocupar diferentes posiciones** sin alterar su valor.

b) Leen y discuten las siguientes representaciones de números utilizadas por los babilonios.

- Observando la siguiente tabla:

60 x 60	60				
		〈	▼	**11**	(10 + 1)
		〈〈〈	▼▼▼▼	**34**	(30 + 4)
	▼	〈〈〈	▼▼	**92**	60 + (30 + 2)
▼				**3.600**	(60 x 60)
▼	▼	〈	▼▼	**3.672**	(60 x 60) + 60 + (10 + 2)
	▼▼〈〈	〈〈〈〈	▼▼▼▼	**1.364**	(20 x 60 + 60 x 2) + (40 + 4)

- Determinan, comparando con el sistema de numeración decimal actual, el valor de cada uno de los símbolos.

- ¿Importa la posición en que está dibujado cada signo? Es decir, ¿conservan su valor cuando cambian de posición?

COMENTARIO

Al igual que en la actividad anterior, lo importante es que los alumnos y alumnas determinen el valor de cada símbolo y, en particular, que se den cuenta de que su valor se modifica cuando se cambian de posición (cosa que no ocurre con el sistema de la actividad anterior). Por otra parte, es interesante que observen que hay símbolos para representar los números 1 (▼) y 10 (〈) pero, no obstante, las agrupaciones se hacen de 60 en 60. Otra cuestión importante es que, como en el sistema egipcio, no hay un símbolo especial para el cero. En el caso babilonio, tal como se puede observar en la tabla, hay solamente espacios.

c) Indagan cómo escribían los números los pueblos mayas (hay que considerar que actualmente hay pueblos mayas que utilizan, al menos oralmente, ese sistema de numeración).

- Dibujan los símbolos.

- Muestran las reglas para la escritura de los números a través de ejemplos (utilizando números pequeños, no mayores que 30).

d) Discuten las diferencias de este sistema con los dos anteriores en función de:
   - el principio de posición (valor posicional);
   - la existencia o no de una base; y,
   - la existencia o no del cero.

COMENTARIO

Los aspectos fundamentales de la actividad se sintetizan en la última proposición: la comparación, previa caracterización, de sistemas con y sin base, que siguen el principio de posición y en los que se utiliza el cero. Para completar la actividad se sugiere hacer una síntesis colectiva e introducir comparaciones explícitas con el sistema de numeración decimal, en todos los aspectos señalados.

Actividad 3

Analizan el papel y la importancia de los símbolos y de las reglas para establecer algún sistema que permita contar, registrar y comunicar información numérica.

Ejemplo

Organizados en grupos, inventan símbolos y formas de comunicar cantidades. Juegan a enviar mensajes numéricos a otro grupo usando sus creaciones y a decodificar los que les sean enviados.

- Establecen un conjunto de símbolos para representar cantidades. Los dibujan y/o escriben estableciendo las equivalencias con el sistema decimal.
- Crean las reglas necesarias para combinar los símbolos y representar cantidades cualesquiera.
- Practican la escritura de números con los símbolos y las reglas creadas por el grupo.
- Inventan mensajes con información numérica y los intercambian con otros grupos, incluyendo el significado de los signos y las reglas de modo que se puedan decodificar.
- Se presentan al curso algunos de los símbolos y reglas inventados para expresar cantidades. Dan algunos ejemplos.
- Discuten y comentan sobre la necesidad de expresar cantidades, piensan en preguntas hipotéticas como: ¿qué sucedería si no existiera ninguna manera de comunicar cantidades?
- Reflexionan sobre un sistema tal en que cada unidad es representada por una raya. Por ejemplo, 33 se representaría así:

  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

¿Cómo se representaría, por ejemplo, el 25; el 152; el 150; el 1.000, etc.?
¿Qué inconvenientes tendría tal sistema para representar grandes cantidades?

- Discuten y analizan las diferentes formas inventadas por cada grupo para expresar una misma cantidad. Comparan estas representaciones, en cuanto a la facilidad, comodidad y economía de símbolos utilizados.

COMENTARIO

La reflexión debe centrarse en la necesidad de comunicar cantidades y por ello la invención de un conjunto de símbolos y reglas para trasmitirlos. El representar una misma cantidad usando símbolos diferentes ayuda a comprender que, aunque éstos sean diferentes, la cantidad que se desea comunicar (por ejemplo, la cantidad de lápices que hay en un estuche) no varía; sólo es cuestión de acuerdo y que la "creación" satisfaga la necesidad para la cual se creó.

Actividad 4

Analizan el sistema de numeración binario; expresan cantidades usando base 2 y 10; comparan las distintas expresiones en cuanto a la cantidad de dígitos usados, las formas de agrupación en cada base; y analizan las ventajas y desventajas de cada sistema.

Ejemplos

1. Leen y comentan la siguiente situación.

En el mundo donde vive "Computín" existe una forma distinta de expresar las cantidades, a pesar que se usan dos símbolos que nosotros conocemos: el 0 y el 1.
Computín le muestra a Marcela algunas cantidades escritas en su sistema y le explica las reglas para escribir las cantidades.

Algunos números :

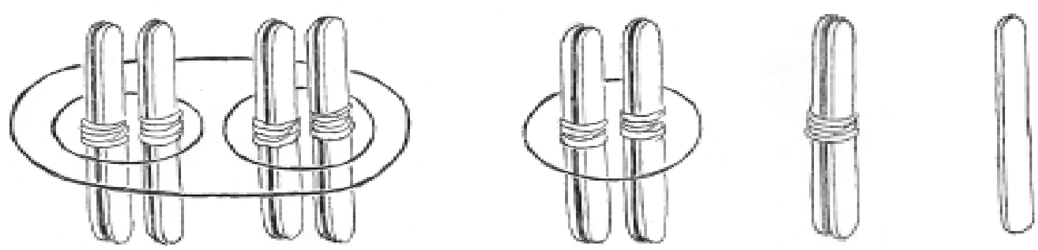
1	es lo mismo que el 1 tuyo, le dice a Marcela
10	es lo mismo que el 2
11	es lo mismo que el 3
100	es lo mismo que el 4
101	es lo mismo que el 5
110	es lo mismo que el 6
111	es lo mismo que el 7
1.000	es lo mismo que el 8
1.001	es lo mismo que el 9
1.010	es lo mismo que el 10
1.011	es lo mismo que el 11

Luego le pregunta a Marcela ¿sabes a qué número de tu sistema decimal equivale el 1100 escrito en el sistema de base 2?
Sí, le contesta Marcela. ¿Cuál será la respuesta de Marcela?

- Para encontrar la respuesta:
  Usan palos de helados y elásticos para representar cantidades como en el país de "Computín":
  Toman un grupo de palitos (esa es la cantidad a comunicar) y van haciendo agrupaciones cada dos en forma sucesiva. Cada agrupación se une con un elástico. Las agrupaciones de 2 elementos usan un elástico de un color, las de 2 agrupaciones de 2 elementos usan elástico de otro color y así sucesivamente. Es importante que el número máximo de cada agrupación sea igual a 2.
- Completan una tabla como la siguiente para asociar los agrupamientos con la forma de escribir.

2 agrupaciones de la anterior	**2 agrupaciones de la anterior**	**2 agrupaciones de la anterior**	**2 agrupaciones de 2**	**1 agrupación de 2**	**unidades**

Gráficamente:



- averiguan si esta forma de escribir cantidades se usa en la realidad de alguna forma.

2. **Relacionan la forma de escribir cantidades en forma binaria con el lenguaje usado por las computadoras para codificar la información. Averiguan el funcionamiento del lenguaje en las computadoras. Comparten sus hallazgos y comentan sobre la utilidad que presta a las computadoras y no así en otras situaciones de la vida.**

COMENTARIO

Se puede repetir la secuencia de formación de números expresados en la situación de "Computín" o hacerla para otras cantidades.

Es importante hacer las agrupaciones y completar la tabla como sigue para así asociar la escritura con la agrupación.

Un ejemplo si se tienen 11 palitos se ve en la tabla así:

2 agrupaciones de la anterior	**2 agrupaciones de la anterior**	**2 agrupaciones de 2**	**1 agrupación de 2**	**unidades**
	1	0	1	1

y los palitos agrupados quedan así.

1 0 1 1

COMENTARIO

Es importante hacer, permanentemente, la relación con la base diez, en la cual se hacen agrupaciones de diez en diez. Complementariamente se puede utilizar un ábaco con el fin de visualizar las agrupaciones.

Actividad 5

Analizan críticamente las características principales del sistema de numeración decimal y lo comparan con otros en cuanto a ventajas y desventajas.

Ejemplo

Completan la actividad anterior, agregando la explicación que daría Marcela a su amigo "Computín" respecto de la forma usada por ella para expresar cantidades, es decir, en el sistema decimal de numeración.

- Crean una tarjeta con la explicación de las reglas de agrupamiento usando de apoyo los palos de helado y que considere los siguientes aspectos:
  Cantidad máxima de elementos de cada agrupación.
  Ejemplos de varias cantidades de palitos (o una secuencia de cantidades) que se agrupan de esa forma (10, 100, 1.000, etc.).
- Crean y completan una tabla con las agrupaciones, tal cual lo hicieron con el sistema binario.
- Comparten las explicaciones hechas en las tarjetas, eligen las más completas y reflexionan sobre las características del sistema decimal.
- Completan su análisis a partir de preguntas como las siguientes:
  ¿Por qué crees que el nombre de nuestro sistema de numeración se denomina "decimal"?
  ¿Cuántos dígitos o símbolos se usan para expresar todas las cantidades? ¿Cuáles son?
  ¿Por qué crees que se afirma que el sistema de numeración decimal es posicional?
  El dígito 1 en la posición de las unidades de mil (piensa en 1.001) ¿vale lo mismo que si está en la posición de las unidades? ¿Por qué?

COMENTARIO

En la tabla que completen las niñas y niños pueden aparecer en forma espontánea los nombres de dichas agrupaciones (unidad, decena, etc.).

A través de preguntas como las que se proponen llevar a los alumnos y alumnas a centrar las conclusiones sobre las características fundamentales del sistema decimal: posicional de base 10.

Las primeras actividades de esta unidad aportan elementos para abordar el carácter posicional (diferente al agregativo de otros sistemas como el romano).

De manera complementaria se puede trabajar, por ejemplo, el sistema de unidades de medida del tiempo, en el que se utilizan los mismos símbolos que en el decimal pero en el rango de segundos, minutos y horas se hacen agrupaciones de 60 en 60.

Actividades de evaluación

A continuación se proponen algunas actividades y problemas para la evaluación de los aprendizajes esperados de la unidad y que pueden ser incorporadas en su plan de evaluación. Algunas de las actividades están diseñadas para ser trabajadas en grupo.

En la columna de la derecha se especifican algunos indicadores que orientan las observaciones del logro de los aprendizajes.

Ejemplos de actividades y problemas	Indicadores / Observar que:
Analizan distintos sistemas de numeración que han investigado en clases u otros conjuntos de símbolos que permitan expresar cantidades y explican en forma sintética sus principales características.	
Ejemplo a) El curso se divide en grupos y cada uno recibe un conjunto de números escritos (en cifras o representados por símbolos gráficos) según reglas diferentes a las del sistema decimal y sus equivalentes en éste.	• Centran su análisis en la búsqueda del valor de cada símbolo (si corresponde), en la existencia o no de cero, en el tipo de agrupaciones, en el uso o no de valor posicional.
Analizan los números y determinan los diferentes valores de cada símbolo o cifra. • Escriben otros números (menores que 100) siguiendo las reglas encontradas. • Explican los elementos que consideraron para determinar las reglas.	• Aplican adecuadamente las reglas y justifican considerando factores que caracterizan al sistema decimal (es decir, establecen comparaciones adecuadas).
b) Inventan reglas necesarias para expresar cantidades (menores que 100) a partir de la combinación de un conjunto de entre 5 y 8 símbolos (o cifras) dadas, primero considerando que ninguna de ellas representa al cero y, posteriormente, designando ese valor a alguna de ellas.	• Incorporan en las reglas condiciones que permitan sustituir unos símbolos por otros al expresar cantidades superiores a la que representa el símbolo de mayor valor.

- Explican las reglas y muestran, con al menos tres ejemplos, que permiten expresar inequívocamente cantidades.

- Las reglas sufren modificaciones al considerar la existencia del cero.

- Pueden explicar las reglas con claridad de modo que otras personas puedan aplicarlas adecuadamente.

Unidad 4

Relaciones de proporcionalidad

TIEMPO ESTIMADO: 10-11 SEMANAS

Contenidos

Proporcionalidad

- Resolución de situaciones problemas, estableciendo razones entre partes de una colección u objeto y entre una parte y el todo.
- Interpretación y uso de razones expresadas de diferentes maneras.
- Resolución de problemas, elaborando tablas correspondientes a:
  - situaciones de variación no proporcional;
  - situaciones de variación proporcional directa e inversa.
- Identificación y análisis de las diferentes razones y parejas de razones que se pueden establecer entre los datos de tablas correspondientes a variación proporcional directa e inversa.
- Comparación de tablas correspondientes a situaciones de variación proporcional directa e inversa, para establecer diferencias.
- Interpretación y expresión de porcentaje como proporciones y cálculo de porcentaje en situaciones cotidianas.
- Interpretación y expresión de resultados de medidas, grandes y pequeñas, apoyándose en magnitudes diferentes (un décima de segundo en distancia recorrida por un atleta, por ejemplo).

Tratamiento de la información

- Presentación de información en tablas de frecuencias relativas y construcción de gráficos circulares.

Aprendizajes esperados

Las alumnas y los alumnos:

- Establecen relaciones entre magnitudes involucradas en problemas diversos y discriminan entre las relaciones proporcionales y las no proporcionales; y entre proporcionales directas e inversas.
- Evalúan y utilizan diversas estrategias para solucionar problemas que implican variaciones proporcionales de las magnitudes.
- En contextos diversos resuelven situaciones problemas que implican un razonamiento proporcional.
- Explican e interpretan el significado de información habitual expresada en razones, adecuándose al contexto y basándose en razonamientos proporcionales.
- Resuelven problemas de porcentaje e interpretan resultados de situaciones diversas expresados en porcentajes. Leen, interpretan y construyen gráficos de frecuencias relativas (circulares).

Orientaciones didácticas

A través de las actividades propuestas en esta unidad se espera que niños y niñas enfrenten, de manera sistemática, situaciones en las cuales existen relaciones entre dos magnitudes (o entre los valores de una misma magnitud); puedan distinguir entre diferentes tipos de situaciones y distintos tipos de relaciones entre las magnitudes (proporcionales y no proporcionales; directas e inversas).

Las relaciones proporcionales están presentes ampliamente en situaciones cotidianas y en las ciencias. Al establecer, por ejemplo, valores de una moneda considerando su equivalencia en otra, se está, normalmente, frente a una situación de variación proporcional (directa). Del mismo modo, los cálculos de porcentajes y de variaciones porcentuales apelan al razonamiento proporcional.

No obstante, hay también situaciones en las cuales las variaciones de los valores observadas, y que relacionan dos variables, pueden resultar engañosas, al aparecer, a primera vista, como proporcionales no siéndolo realmente (por ejemplo, la relación entre grados Celsius y grados Farenheit). Por esta razón, como se señala más arriba, una primera cuestión importante de abordar es, precisamente, esta distinción.

Otro ejemplo de relaciones no proporcionales entre dos o más variables se encuentra en situaciones en las que se relaciona la variación de estatura y el peso de las personas con el paso de la edad. Estos contextos son especialmente adecuados para poner en evidencia cómo influyen en su variación diversos factores, no siempre posibles de determinar (dieta, factores hereditarios, etc.). En algún momento la estatura, por ejemplo, deja de aumentar y el peso puede aumentar o disminuir independientemente de la edad y de la estatura.

Al enfrentar a los alumnos y alumnas al análisis y resolución de situaciones y problemas donde hay una relación proporcional entre las magnitudes involucradas, se hace énfasis en el uso de tablas de proporcionalidad,

en las que se va registrando la información, para ayudarles a identificar la forma en que los valores van variando, a determinar razones y pares de razones iguales.
Se insiste, también, como en los años anteriores, en otorgar a los alumnos y alumnas la oportunidad de desarrollar sus propias estrategias para enfrentar una situación, incorporando paulatinamente, y en la medida de que eso sea necesario, algunos procedimientos convencionales. En este sentido, se propone enfrentar problemas abiertos, que provoquen la necesidad de encontrar soluciones, de aventurarse en la búsqueda de patrones, de soluciones más generales, etc.

El énfasis del trabajo en la unidad está puesto, más que en el cálculo de valores de una proporción, en la determinación de variaciones proporcionales (cuando corresponde), directas o inversas. Se enfatiza, en consecuencia, una mirada dinámica de las proporciones. En definitiva, se trata de ir desarrollando el razonamiento proporcional más que el aprendizaje de un conjunto de procedimientos preestablecidos (tales como la aplicación mecánica de la regla de tres, por ejemplo) a partir de actividades que ponen en juego sus propias intuiciones y conocimientos, que permiten ir sistematizando procedimientos, observando el comportamiento de las variables y obtener conclusiones.

De este modo, se encuentran en la unidad escasas definiciones. Contrariamente, se propone una abundante y variada cantidad de situaciones que permiten poner en juego diferentes estrategias y tipos de análisis. Además se incluyen herramientas como tablas para registrar información de manera sistemática. Los gráficos de proporcionalidad serán abordados en el nivel siguiente (NB6).

Por otra parte, y sin que esto sea un tipo de distinción o definición para ser necesariamente entregada a los alumnos y alumnas, se enfatiza el análisis de las relaciones entre dos dominios de magnitud (o entre valores de un mismo dominio de magnitud) a través del establecimiento de razones internas. En el enfoque que se ha desarrollado, se llama razones internas a las que se establecen entre valores al interior de un mismo dominio de magnitud (por ejemplo, en una situación de cambio de unidades, de metros a centímetros, se trataría de establecer razones entre metros y, separadamente, entre centímetros; del tipo “1 metro es a 2 metros como 100 centímetros son a ...”).

Se ha llamado razones externas a aquellas que se establecen entre dos dominios de magnitud (de diferente o del mismo tipo). En el ejemplo del párrafo anterior, se trataría de las que relacionan metros con centímetros. Las razones externas corresponden a un rasgo fundamental de la proporcionalidad –que es el cociente constante– que será abordado como tal, junto con las representaciones gráficas, en NB6 (8º Año Básico).

Se ha considerado este enfoque porque es extremadamente clarificador de las relaciones de proporcionalidad por cuanto permite visualizar, de manera permanente, las variables involucradas en el problema y comprender cómo es que se pasa de unos valores a otros. En el ejemplo del párrafo anterior, las razones llamadas internas muestran de manera muy clara que si se duplica la cantidad de metros, se duplica también, en consecuencia, la cantidad de centímetros.

Por razones relacionadas con la claridad de la exposición, se ha optado por conservar esta nomenclatura (razones internas y razones externas), particularmente en los comentarios destinados a los profesores y profesoras. Se insiste en que no es, necesariamente, una cuestión a ser enseñada a los niños y niñas. Importa en cuanto contribuya a la claridad de los razonamientos.

Un tema que está presente en esta unidad, que ya se comenzó a trabajar en niveles anteriores, es el de porcentajes. Más allá de calcular porcentajes referidos a ciertas cantidades, se proponen situaciones en que los niños y niñas aborden variaciones proporcionales. No obstante, el primer aspecto no ha sido descuidado y está abordado, en particular, en contextos de análisis de situaciones de tipo estadístico. Se introduce el cálculo de frecuencias relativas y su representación en gráficos circulares.

Otro contexto privilegiado en la unidad dice relación con unidades de medida y la expresión de mediciones en unidades diferentes (lo que requiere establecer equivalencias). En estas situaciones se insiste en habilidades que se han venido desarrollando desde el primer nivel, relacionadas con la búsqueda de soluciones razonables y pertinentes a los diferentes problemas y a la comunicación de ellas de manera, también, pertinente.

Como se ha dicho más arriba, en este nivel se inicia el abordaje sistemático de la proporcionalidad, que se continúa en NB6 con la ampliación al estudio de las constantes de proporcionalidad y la incorporación de las representaciones gráficas.

Actividades de aprendizaje

Actividad 1

Comparan objetos de la misma naturaleza (una parte de sus partes y el objeto completo o una parte con otras), establecen relaciones entre ellos y las expresan con la ayuda de razones.

Ejemplo

a) Observan los siguientes dibujos y los describen.

- ¿Qué se podría decir de la niña de la izquierda en relación con la casa? ¿Y de la niña de la derecha?
- ¿En cuál de los dos casos les parece que el dibujo es "más proporcionado"? ¿Por qué?

COMENTARIO

Esta primera actividad tiene por objetivo simple hacer surgir de los alumnos y alumnas expresiones del sentido común respecto de lo que se califica como "proporcionado o no proporcionado". Es evidente que en la figura de la izquierda, la niña es demasiado grande en comparación con la casa (o la casa es demasiado pequeña). Se persigue trabajar una primera idea de las razones considerándolas como la expresión de una comparación y que no tienen existencia por sí mismas sino en función de un referente con el cual se compara. En este caso, la comparación se hace en función de una norma: las personas no pueden ser del mismo tamaño que una casa.

b) Se informan sobre ciertas relaciones que existen, en general, entre las partes del cuerpo humano de una persona adulta. Por ejemplo, que la cabeza está "contenida" entre 7 y 8 veces en el cuerpo completo (altura).

c) Analizan en su sala relaciones entre pares de objetos. Por ejemplo, entre la puerta y la muralla. Determinan en función de qué están comparando (por ejemplo, la altura de la puerta con la altura de la muralla).

- Eligen pares de objetos, determinan la magnitud que compararán (por ejemplo, el peso, la longitud, etc.), los comparan y expresan numéricamente la relación. Por ejemplo, la altura de la muralla es dos veces la altura de la puerta.

COMENTARIO

Esta actividad tiene por objetivo llevar, cuando sea posible y corresponda, a expresar con la ayuda de los números, una relación entre dos magnitudes del mismo tipo (objetos pesados, objetos largos) o dentro de un mismo objeto (en algunos casos se refiere a persona). De este modo se establece una manera de expresar tales relaciones: las razones. Así, por ejemplo, se puede decir que la altura de la puerta y la altura de la muralla están en una razón de $\frac{1}{2}$ (o uno a dos, o uno es a dos).

Actividad 2

Interpretan informaciones cuantitativas que expresan relaciones entre magnitudes, (incluyendo las expresiones en porcentajes), las analizan y buscan formas de comunicarlas ya sea gráfica o verbalmente para una mejor comprensión.

Ejemplo

a) Trabajan en parejas o en grupos: leen informaciones como las que se entregan a continuación, las comentan y responden a las preguntas que se formulen.

Hasta el año 1999, se había registrado que en el mundo había 350 millones de personas vivas infectadas con Hepatitis B.

Fuentes: INE, ministerios, servicios públicos y publicaciones periódicas, en general.

Considerando que la población mundial actual se estima en 6 mil millones, ¿cuál era la razón entre las personas infectadas y el total de la población mundial?
¿Es correcto decir que, aproximadamente 6 de cada 100 personas vivas estaban infectadas con el virus de la hepatitis B?

COMENTARIO

En este caso se trata de que busquen razones equivalentes con el fin de hacer más cercana y comprensible la información, pasando de la razón 350.000.000 : 6.000.000.000 a 350 : 6.000 y, desde allí a 35 : 600 y, finalmente, a la aproximación 6 de cada 100. Situaciones como esta son particularmente apropiadas para trabajar la idea de razones equivalentes.

El 55% de los niños y niñas que cursan primero básico presentan problemas de caries.

Fuentes: INE, ministerios, servicios públicos y publicaciones periódicas, en general.

¿Cuántos niños y niñas por cada 100 de primer año tienen problemas de caries?

Según esta información ¿cada cuántos alumnos de primer año uno de ellos tiene problemas de caries, aproximadamente?

COMENTARIO

En esta actividad se pretende, por una parte, que interpreten la información haciendo uso de referentes diferentes con el fin de que puedan comprender su significado cuantitativo. Se sugiere introducir la noción de razón a partir de la interpretación de la información entregada.

Otra idea muy importante es que 55% (es decir, 55 por cada cien) no significa, necesariamente, que si se toman cien niños o niñas cualesquiera 55 van a presentar caries. Lo que sí quiere decir es que, en una población que se encuentra territorialmente distribuida 55 de cada cien personas tienen problemas de caries.

La última pregunta tiene por objetivo transformar la información en una razón que muestre en forma aproximada una imagen muy directa y simple de la situación. En este caso, 55% se puede interpretar aproximadamente como “uno de cada dos.”

Por otra parte, interesa en particular abrir la discusión respecto de las consecuencias que tienen para la salud las caries, cuidados preventivos, relacionarlo con la alimentación, etc. En este aspecto, se puede establecer un trabajo coordinado con Comprensión del Medio Natural. Pueden averiguar y discutir sobre qué programas médicos se desarrollan en las escuelas o comunas en Chile para enfrentar los problemas de salud escolar.

En las bibliotecas, anualmente son consultados o leídos en promedio 1,6 libros por cada chileno o chilena.

Fuentes: INE, ministerios, servicios públicos y publicaciones periódicas, en general.

¿Cuántos libros son consultados o leídos en las bibliotecas en promedio cada 10 personas anualmente? ¿y cada 100? ¿y cada 1.000 personas?

COMENTARIO

En los ejemplos anteriores a éste se trataba de establecer razones entre habitantes. En este caso, se establece una razón distinta que relacione “libros” y “personas.” Esto significa, por ejemplo, que no se puede llevar esta relación a un porcentaje, como en los casos anteriores, aunque se pueda determinar que por cada 100 personas se consultan o leen 160 libros, en promedio, en las bibliotecas.

Por otra parte, se trata también de reflexionar respecto de la expresión más pertinente según lo que se quiera expresar. Así, 1,6 libro consultados por persona significa más de un libro consultado por cada persona, en promedio, al año. Sin embargo, al mismo tiempo significa que se consultan o leen en bibliotecas unos 24 millones de libros en un año, cifra que podría parecer muy alta (en el cálculo se han considerado 15 millones de habitantes). En este sentido, se intenta valorar la expresión en razones como una manera de relacionar la información significativa o comprensivamente, en términos relativos. Es importante llevar a los alumnos y alumnas a hacer este tipo de comparaciones.

Finalmente, es necesario hacer ver que esta información se refiere a un promedio y que no significa que todos los habitantes han consultado libros en la biblioteca, tampoco significa que cada persona que lee o consulta en bibliotecas utiliza 1,6 libros, sino que hay algunos que leen más que otros. En consecuencia, 16 libros consultados por cada 10 personas, o 160 libros por cada 100 personas son, también, cifras promedio.

En Aysén viven, en promedio, 75 personas por cada 100 km cuadrados mientras que en Antofagasta viven 320 por cada 100 kilómetros cuadrados. En Chile, la densidad poblacional es de 19,3 hab/km cuadrado.

Fuentes: INE, ministerios, servicios públicos y publicaciones periódicas, en general.

¿Qué significa la densidad poblacional?

- Expresan la información de la densidad poblacional en Antofagasta y en Aysén en relación con 1 km cuadrado, de manera aproximada. Discuten las diferencias entre una y otra expresión.
  ¿Cuántas personas viven en Chile por cada 100 km cuadrados, en promedio? Comparan la población total del país con la de Aysén y la de Antofagasta.
- Comparan la densidad poblacional del país con los datos entregados sobre Aysén y Antofagasta.

COMENTARIO

En este caso se trata de establecer relaciones entre datos referidos a magnitudes de especies diferentes (número de habitantes y km cuadrados). Además, con el fin de poder comparar (entre Antofagasta y el país completo, por ejemplo) es necesario llevar las magnitudes a un referente común (1 km cuadrado o 100 km cuadrados). Por otra parte, al hacer cambios de unidades interesa que los niños y niñas decidan de qué manera les parece más clara la información (por ejemplo, “75 personas por cada 100 km cuadrados” o “entre 7 y 8 personas por 10 km cuadrados”).

b) Analizan las siguientes informaciones, escriben preguntas referidas a ellas y utilizan razones para expresarlas de una forma diferente.

- *En el mundo hay aproximadamente 6 mil millones de personas de las cuales diariamente dieciséis mil se infectan de SIDA.*
- *En Chile hay 6 estaciones de radio cada 100 mil habitantes.*

- *El 44% de los productos exportados por Chile corresponden a frutas y verduras.*
- *25 de cada 1.000 habitantes de Chile cursa estudios universitarios.*
- *A cada médico colegiado le corresponde atender a 846 habitantes.*
- *En el país hay 8 habitantes por cada vehículo motorizado.*

Fuentes: INE, ministerios, servicios públicos y publicaciones periódicas, en general.

COMENTARIO

Alentar a los alumnos y alumnas a realizar preguntas que permitan tanto entender mejor la información como las consecuencias de lo que se afirma. La expresión en términos de razones tiene como propósito que la información sea más clara en cuanto a lo que representa cuantitativamente. Si es necesario, orientar el análisis con preguntas como: ¿de qué otra manera se podría explicar esta cantidad?, ¿qué representa la expresión por cada 100 habitantes?, etc.

Actividad 3

Analizan información obtenida en experimentos, encuestas, noticias, datos geográficos y mediciones que presenten una relación entre dos variables para:

- **caracterizar cuantitativamente la relación, apoyándose en la construcción de tablas;**
- **clasificar la información de acuerdo al tipo de relación cuantitativa que la caracteriza, utilizando diversos criterios (por ejemplo, la posibilidad o la imposibilidad de predecir valores desconocidos; la observación de un crecimiento o decrecimiento regular, etc.).**

Ejemplos

1. Recopilan datos en los que se asocien dos variables del siguiente tipo.

En personas:	número de zapato y largo del pie en centímetros,
	edad y peso,
	edad y estatura,
	estatura y peso.
Precios de:	UF y su equivalente en pesos en un día determinado,
	llamadas internacionales por minuto, u otros.
En mediciones:	distancia recorrida y tiempo (a una velocidad constante),
	perímetro y área de cuadrados por variación de la longitud de sus lados.

a) Registran los datos en tablas como las siguientes:

Nombre	Edad	Peso
Juan	12	55 kg
Beatriz	13	48 kg
Ernesto	13	51 kg

Profesora	36	58 kg

UF	$
1	15.162,87
2	30.325,74
3	

50	758.143,5

- Analizan el comportamiento de las variables a partir de preguntas como:
  ¿Cómo es la relación entre las dos variables?
  Si se duplica el valor de una de ellas (la cantidad de UF, por ejemplo), ¿qué ocurre con el valor de la otra? ¿Se duplica también?
  ¿Es posible calcular o predecir el valor de una de las variables conociendo el valor de la otra?
  Sabiendo que Juan tiene 12 años y que pesa 55 kg, ¿se podría calcular cuánto pesará cuando tenga el doble de la edad actual (es decir, 24 años)? ¿Por qué?
- A partir de las observaciones de los datos y la relación entre los valores de las variables, determinan si existe alguna regularidad entre ellos en función de, por ejemplo, si es posible predecir o calcular valores desconocidos cualesquiera, o si se pueden establecer pares de razones iguales (tomando pares de razones cualesquiera como, por ejemplo $\frac{1}{2} = \frac{15.162,87}{30.325,78}$; cuestión que no se puede hacer con los datos de la tabla de edad y peso). Clasifican las relaciones encontradas entre aquellas en las que existe una variación proporcional y no proporcional.
- Establecen conclusiones para caracterizar las relaciones que implican una variación proporcional entre dos magnitudes.
- Elaboran una lista de situaciones en las que se puede establecer variaciones proporcionales. Discuten y argumentan.

2. Leen y analizan la siguiente situación:

La familia González ha recibido hace muy poco tiempo su nueva casa luego de optar al subsidio habitacional. Ellos están pensando poner baldosas en una parte del patio de su casa, para evitar el polvo. Las medidas del sector rectangular que desean embaldosar son de 5 metros por 8 metros. Según las averiguaciones realizadas, las posibilidades dependiendo del tamaño de las baldosas son las siguientes:

Tipo de baldosa o pastelón cuadrados (cm de lado)	Cantidad de baldosas necesarias
100	50
50	160
25	640
20	1.000

- Según los datos de la tabla reflexionan sobre las relaciones que se pueden establecer entre ellos. Algunas preguntas para guiar la reflexión pueden ser:
  ¿Qué ocurre con el número de baldosas necesarias para embaldosar el patio si se disminuye la longitud del lado de la baldosa?
  ¿Qué ocurriría con el número de baldosas necesarias para embaldosar el patio si se duplica, por ejemplo, la longitud del lado de una baldosa de 10 cm (o sea, se pusiera una de 20 cm por lado)?
  Tomando como referencia el pastelón de 1 m de lado, si se disminuye a la mitad la longitud de su lado, según la tabla ¿cuántas baldosas o pastelones se necesitan para embaldosar el patio? ¿esta cantidad es mayor o menor que si se usan las de 1 m de lado? ¿la mitad? ¿el doble?, etc.

- Establecen conclusiones en relación a las características de la relación anteriormente determinada entre los datos. Buscan formas de calcular cuántos pastelones o baldosas se necesitan en el caso que se varíe la longitud de su lado, tomando como referente una de 1 m por lado y expresando las longitudes en metros.

- Completan la tabla con otras medidas de baldosas o pastelones. Discuten respecto a las posibles dimensiones que pueden tener como también hasta cuándo tiene sentido aumentar o disminuir el tamaño de la baldosa o pastelón.

COMENTARIO

Estas actividades apuntan a que se haga una primera distinción entre situaciones donde existe una variación proporcional y aquellas en la que no la hay. Se trata de que los niños y niñas primero determinen si existe una relación y, segundo, caractericen dicha relación.

Un criterio es el de la posibilidad de encontrar valores desconocidos a partir de los datos de la tabla a través del establecimiento de pares de razones iguales (que permiten calcular un valor desconocido). De este modo, por ejemplo, aunque exista una relación entre la edad de una persona y la estatura, ella no es proporcional, es decir, la estatura no varía proporcionalmente con la edad y depende, también, de otros factores, existiendo una gran variedad de casos. En segundo lugar, el crecimiento no se da en forma continua y regular. En cambio, conocido el valor de una UF se puede calcular el valor de una cantidad cualquiera de pesos en UF (en este caso se trata de la misma variable expresada en unidades diferentes). Lo mismo ocurre, en general, con los precios de productos y la cantidad de ellos. En las situaciones que involucran distancias recorridas y tiempo, es muy importante precisar que es necesaria la condición de desplazamiento a una velocidad constante o considerar una velocidad media.

La situación (b) apunta a precisar los criterios para determinar si la relación entre las variables es o no proporcional. A diferencia del caso de la edad y estatura, acá es posible determinar la cantidad de baldosas necesarias para cualquier valor (razonable, por cierto). Sin embargo, la relación entre la longitud del lado de la baldosa o pastelón y la cantidad necesaria para cubrir el patio no es proporcional. Es decir, si se disminuye, por ejemplo, a la mitad la longitud del lado de una baldosa, las necesarias para cubrir una misma superficie se cuadriplica (no se duplica). En NB4 han trabajado el efecto de la variación de la longitud de los lados de un cuadrado en su área.

Actividad 4

Analizan y resuelven situaciones de variación proporcional (directa) entre dos magnitudes, confeccionan tablas de dos columnas que permitan explicar los tipos de razones que se pueden establecer.

Ejemplo

Leen y comentan las siguientes situaciones:

a) Una receta para preparar mermelada de ciruelas:

Lave bien la fruta, viértala en una cacerola y agregue tres cuartos de kg de azúcar por cada kilo de ciruelas. Deje cocer hasta que tenga una consistencia más bien espesa, mezclando permanentemente.

- Considerando que en un grupo no todas las personas prepararán la misma cantidad de mermelada, elaboran una tabla en la que registran la cantidad de azúcar necesaria para diferentes cantidades de ciruelas.

Ciruelas	Azúcar
1 kg	$\frac{3}{4}$
2 kg	
3 kg	

COMENTARIO

Con el fin de evitar que, eventualmente, el uso de fracciones dificulte el razonamiento se puede cambiar la expresión por números naturales recurriendo a los gramos, o a números decimales manteniendo la unidad.

- Comparten los procedimientos usados para realizar los cálculos.
  ¿Cómo se hace para calcular, por ejemplo, el azúcar necesaria para 7 kg de ciruelas?

- Redactan conclusiones referidas a la variación proporcional directa orientadas por preguntas como:
  ¿Qué pasa con la cantidad de azúcar si se duplica la cantidad de fruta?
  ¿Y si se triplica? ¿O si se ocupa la mitad (medio kilo)?

COMENTARIO

Es importante que los niños y niñas se aboquen a completar la tabla de manera muy libre. De este modo, posteriormente se pueden analizar los procedimientos diversos que puedan surgir.

Como se ha señalado en las orientaciones didácticas, se pueden establecer razones internas y razones externas en las relaciones proporcionales. En este caso, poniendo la atención en las columnas, si se duplica la cantidad de fruta, se duplica la cantidad de azúcar. Observando las filas, se "multiplica" por $\frac{3}{4}$ la cantidad de fruta y se obtiene la cantidad de azúcar necesaria ($\frac{3}{4}$ kg). En las tablas siguientes se muestra, a la izquierda, el razonamiento pasando por el establecimiento de razones externas y, a la derecha, pasando por razones internas. Es importante insistir en que esta nomenclatura no es para ser enseñada. Se trata de contribuir a una mayor claridad para el docente.

x $\frac{3}{4}$

1	$\frac{3}{4}$
7	

x $\frac{3}{4}$

1	$\frac{3}{4}$
7	

En este tipo de razonamiento, particularmente al utilizar razones internas, se mantiene permanentemente a la vista el sentido de las operaciones, evitando una mecanización prematura. Es muy cómodo para el pensamiento: si se duplica la cantidad de ciruelas, se duplica la cantidad de azúcar, si una cantidad se multiplica por 10, ocurre lo mismo con la otra.

b) Un viaje en taxi:

Una niña sube con su papá a un taxi y le pregunta al conductor cómo funciona el taxímetro. El conductor le entregó esta explicación:

Cuando se sube un pasajero enciendo el taxímetro, el cual marca $ 150, que es la bajada de bandera por los primeros 200 metros. Después de eso, cada 200 metros el taxímetro va marcando $ 70.

- Al llegar a su casa la niña elaboró la siguiente tabla para saber cuánto habían recorrido en el taxi, considerando que habían pagado \$1.690 por el recorrido. Llegó a la conclusión de que habían recorrido más de 4.600 metros pero menos de 5.000.

Metros recorridos (después de los primeros 200 metros)	**Precio**
200 m	\$ 70
400 m	\$ 140
600 m	\$ 210
800 m	\$ 280
1.000 m	\$ 350
2.000 m	\$ 700
4.000 m	\$ 1.400

- Analizan la tabla y discuten:
  ¿Cómo fue haciendo los cálculos la niña?
  ¿Por qué creen Uds. que de 1.000 metros pasa directamente a 2.000 m?
  ¿Y de 2.000 a 4.000?
  ¿Es correcto su cálculo?
  Ella piensa mirando la tabla:
  "4.000 metros más los 200 iniciales son \$1.400 más \$150. O sea, \$1.550."
  ¿Cómo puede haber razonado para determinar que recorrieron menos de 5.000 metros?

c) Analizan las dos situaciones propuestas y establecen conclusiones en relación con las características de las variaciones proporcionales directas.

d) Agregan otros valores a la tabla calculando el valor de algunos viajes en el taxi. Por ejemplo, el precio de recorrer 3.800 metros (sin olvidar que los primeros 200 metros cuestan \$150).

COMENTARIO

En este caso, después de los primeros 200 metros, existe una variación proporcional (directa) entre la distancia recorrida y el precio. Y, del mismo modo como en el caso anterior (a), se pueden establecer tanto razones internas (entre valores de una misma columna) como externas (valores de las dos columnas: que relacionan distancia y precio). Sin embargo, es muy claro utilizar las primeras, de modo que si se duplica la distancia, se duplica el precio, lo que se ve en las razones, por ejemplo, 1.000 : 2.000 y 350 : 700 que cumplen con la igualdad $\frac{1.000}{2.000} = \frac{350}{700} = \frac{1}{2}$

O entre 200 : 4.000 y 70 : 1.400, etc.

Por otra parte, se busca que comprendan la proporcionalidad directa de manera tan simple como: cuando el valor de una variable aumenta o disminuye, el valor de la otra lo hace en el mismo sentido y **en la misma razón.**

En esta situación, es importante que no olviden que el precio de los primeros 200 metros es fijo ($150) y que se han obviado las detenciones del vehículo donde el taxímetro avanza según el tiempo transcurrido. En consecuencia, el cálculo no es más que una estimación.

e) En un segundo ¿se avanza mucho o poco?

Un segundo de tiempo tiene una duración determinada que es la misma en distintas partes del planeta y en diversas circunstancias. Sin embargo puede representar variadas distancias, de acuerdo con la situación de que se trate.

- ¿Qué significa un segundo en la carrera de 100 m planos para el campeón mundial? ¿Qué implica en términos de distancia, es decir, cuántos metros puede avanzar en 1 segundo? ¿Qué implica en términos de ganar o perder una competencia?
- ¿Qué significa un segundo en el viaje de un avión? ¿Qué implica en términos de distancia?
- ¿Qué significa un segundo en la distancia recorrida por un auto fórmula 1, si se compara con el caso de una persona que va caminando?

Para el análisis de las distancias recorridas se puede tener como referencia la siguiente información:

- Un avión que realiza vuelos interoceánicos alcanza una velocidad promedio de 960 km/h.
- Un auto de carrera de fórmula 1 puede alcanzar una velocidad en tramos rectos de 360 km/h.
- El campeón mundial de 100 metros planos recorre esa distancia aproximadamente en 10 segundos.
- Una persona camina a 5 km/h.

COMENTARIO

Otros problemas que pueden ser propuestos son los de equivalencia entre monedas de diferentes países (ampliamente trabajados en NB4 en la unidad de decimales), lo que permite, además, profundizar en el uso adecuado de los decimales (complementariamente a las actividades propuestas en este mismo programa en la Unidad 1, Números decimales en la vida cotidiana).

Actividad 5

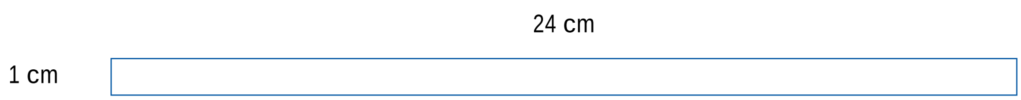
Analizan y resuelven situaciones de variación proporcional (inversa) entre dos magnitudes, confeccionan tablas de dos columnas que permitan explicar razones.

Ejemplo

Leen y resuelven las siguientes situaciones:

a) Se tiene un rectángulo de 24 cm de largo por 1 de ancho. Encontrar una familia de rectángulos que tengan la misma área.

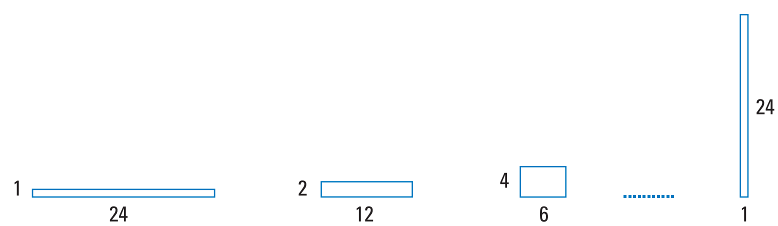
- Determinan el área del primer rectángulo:



- Buscan otros rectángulos que tengan la misma área que éste y los dibujan.

COMENTARIO

Es importante orientar a los alumnos y alumnas a hacer una búsqueda sistemática. Una forma de hacerlo es pedirles que ordenan los dibujos de alguna manera, por ejemplo, de este modo:



La tabla que se pide a continuación les permitirá avanzar en el desarrollo de una búsqueda sistemática.

- Completan una tabla como la siguiente con las medidas de los diferentes rectángulos encontrados:

Largo en cm	Ancho en cm
24	1

Determinan un criterio para ordenar los valores encontrados (por ejemplo, de mayor a menor largo, dividiendo sucesivamente por 2; o dividiendo el largo original por 2; 3; 4 sucesivamente, etc.) y, si es necesario, rehacen la tabla considerando ese criterio.

- Discuten preguntas como la siguiente:

  Manteniendo constante el área (es decir, 24 cm^2), ¿cuánto tendría que medir el ancho del rectángulo si el largo original (de 24 cm) se multiplicara por 2?

- Describen un procedimiento general para encontrar cualquier rectángulo que cumpla con las siguientes condiciones: el largo y el ancho van entre 1 y 24 cm y su área es igual a 24 cm^2.

COMENTARIOS

El procedimiento general ayuda a definir condiciones para la proporcionalidad inversa. Ellos pueden referirse a, por ejemplo, que el producto es constante (lo que corresponde al área en este caso) o que si el largo se divide por un cierto número, el ancho se multiplica por ese mismo número. Para una mejor visualización se les puede pedir dibujar ordenadamente los rectángulos en papel cuadriculado (por ejemplo, de menor a mayor largo, en forma vertical u horizontal). En el nivel siguiente (NB6) se abordará de manera específica la constante de proporcionalidad y las representaciones gráficas.

b) *En la ferretería "Carpintero" se están elaborando los catálogos de las bombas de extracción de agua de pozos. Las características que desean destacar, aparte de otros atributos técnicos, son las dimensiones de las mangueras de salida de agua y el tiempo que se demora en llenar un estanque de 200 litros. Las bombas de extracción de agua que venden en esta ferretería mantienen una velocidad constante de salida del agua cuando se varía el diámetro de la manguera, por lo que mientras mayor es el diámetro de la manguera, mayor es la cantidad de agua que por ella sale. Para mostrar a los clientes esta situación, el encargado elaboró la siguiente tabla:*

Diámetro de la manguera de salida de agua	**Tiempo que demora en llenar un estanque de 200 litros**
0,5 pulgadas	60 minutos
1 pulgada	30 minutos
3 pulgadas	10 minutos
6 pulgadas	5 minutos

- A partir de los datos de la tabla reflexionan sobre las relaciones que se pueden establecer entre ellos. Algunas preguntas para guiar la reflexión pueden ser:
  ¿qué ocurre con el tiempo que tarda en llenar el estanque si se aumenta el diámetro de la manguera?; ¿qué ocurre con el tiempo que tarda en llenar el estanque si se disminuye el diámetro de la manguera? Tomando como referencia la manguera de 0,5 pulgadas de diámetro, si se aumenta al cuádruple el diámetro de la manguera, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse el estanque de agua? ¿El tiempo es menor o mayor a lo que se demora la manguera de 1,5 pulgadas de diámetro? ¿Cuánto más o cuánto menos?, ¿la cuarta parte?, ¿el cuádruple?, etc.

- Establecen conclusiones con respecto a las características de la relación entre los datos anteriormente determinada.

- Completan la tabla considerando mangueras con otros diámetros. Discuten respecto a las posibles dimensiones que pueden tener las mangueras como también hasta cuándo tendría sentido aumentar o disminuir el tamaño de éstas.

COMENTARIO

Se recomienda utilizar otros contextos en problemas de proporcionalidad inversa, como por ejemplo velocidad-distancia, velocidad- tiempo. En este sentido es interesante comentar con las alumnas y alumnos la idea de velocidad promedio, y diferenciarla de la velocidad constante. De este modo, se puede considerar, de manera abstracta, que si un bus o un auto mantiene una velocidad constante y el tiempo utilizado no varía, es posible calcular la distancia recorrida. Sin embargo, en la práctica es muy difícil que un vehículo mantenga una velocidad constante. Por esta razón al calcular la velocidad de un vehículo en función del tiempo utilizado para recorrer una determinada distancia, se está calculando una velocidad media.

En situaciones de este tipo también están involucradas variaciones proporcionales directas, pues hay, por ejemplo, cambios de unidades (horas, minutos).

c) *En una fábrica de alimentos en conserva se embala la producción mensual de tomates en 4.800 cajas que pueden contener 24 latas cada una. Con el fin de aprovechar mejor los vehículos de transporte se decide cambiar el tamaño de las cajas por otras en las que se pueden poner 18 latas.*
Suponiendo que la producción mensual es constante, ¿en cuántas cajas se puede ahora embalar la producción mensual?

- Trabajando en pequeños grupos calculan la cantidad de cajas y exponen sus procedimiento y su solución.

COMENTARIO

Esta situación es, aparentemente muy simple. No obstante, por la característica de los números involucrados para su solución es necesario establecer que **se requerirá un número mayor de cajas.**

Con el fin de que los alumnos y alumnas tengan muchas oportunidades para analizar y practicar los procedimientos, se puede proponer que completen una tabla imaginando diferentes cantidades de latas por caja:

	Latas por caja	Cantidad de cajas	
	24	4.800	
:2	12	9.600	x2
:3	6		x3
:4	3		

En la tabla se puede observar cómo para pasar de 24 a 12 se divide por 2; en consecuencia, para calcular el número de cajas (segunda columna) se debe multiplicar 4.800 por 2. Y así sucesivamente.

Para calcular el número de cajas si en cada una se ponen 18 latas se pueden utilizar dos procedimientos equivalentes: (1) establecer la razón entre 18 y 24 (18 : 24 = 3 : 4, es decir, $\frac{3}{4}$ y multiplicar en la segunda columna por $\frac{4}{3}$; y, (2) una vez calculado el valor para 6 cajas, proceder al revés, es decir, considerando 18 como el triple de 6 y, por lo tanto, en la segunda columna, dividir por 3 (el número de cajas correspondiente).

También es importante que reflexionen sobre la factibilidad de considerar cajas que puedan contener, por ejemplo, 2 latas. En este caso se puede redefinir la situación considerando, ya no el transporte, sino la venta en paquetes que contienen 2, 3 ó 4 latas cada uno.

d) Analizan las dos situaciones propuestas y establecen conclusiones en relación con las características de las variaciones proporcionales inversas.

Actividad 6

Investigan el uso de la proporcionalidad en el arte, problemas que se plantean y sus soluciones habituales.

Ejemplos

1. **Indagan sobre la sección áurea y sobre las proporciones ideales creadas por Leonardo Da Vinci.**

- Buscan ejemplos en la pintura y/o la arquitectura en los que se hayan utilizado.
- Crean dibujos u objetos aplicando dicha razón o las proporciones ideales de Da Vinci.

COMENTARIO

Al respecto existe bibliografía disponible interesante tanto para los niños y niñas como para apoyar a la docencia (ver Bibliografía).

El vídeo *Donald en el mundo de las matemáticas,* de Walt Disney producciones, presenta buenas imágenes para la motivación respecto a la presencia del rectángulo perfecto en el arte griego.

Se recomienda que, en lo posible, actividades como éstas, de búsqueda bibliográfica, sean realizadas en la sala de clases o en la escuela durante el tiempo escolar -recurriendo a los libros de la biblioteca de aula, internet, etc.- con el fin de orientar efectivamente a los niños y niñas en este tipo de tareas y que éstas sean realizadas en grupos. Por otra parte, es importante no recargar el trabajo escolar en la casa, lugar donde podrían no contar con los materiales necesarios.

Un sitio en internet que entrega ejercicios y problemas variados para ser desarrollados por los alumnos y las alumnas en esta unidad es: **http://www.ince.mec.es/timss/propor.htm**

Actividad 7

Interpretan información presentada en porcentajes, decimales y fracciones estableciendo relaciones entre ellas para seleccionar la forma de cálculo más conveniente en situaciones problemas.

Ejemplo

a) Leen la siguiente afirmación y completan una tabla:

De acuerdo al último censo, se estimó que la población en zonas urbanas para el año 1999 sería de 5.737.137 habitantes. (INE. Censo de 1990).
En la siguiente tabla se registran diferentes maneras de expresar los porcentajes y que ayudan a calcularlos. Completan los datos que faltan.

Porcentajes	Fracción denominador 100	Fracción irreducible	Número decimal
75% de la población	$\frac{75}{100}$ de la población	$\frac{3}{4}$ de la población	0,75 de la población
50% de la población			0,5 de la población
25% de la población		$\frac{1}{4}$ de la población	
	$\frac{20}{100}$ de la población		
10% de la población			
5% de la población			

- Comparan los procedimientos, los desarrollan y, en caso de ser diferentes, comprueban que son equivalentes.
- Comentan la utilidad de las diferentes maneras de expresar porcentajes.

b) Leen la siguientes informaciones y eligen el procedimiento más adecuado para responder la pregunta en cada caso, usando alguno de los procedimientos antes analizados. Explican el fundamento de sus elecciones.

Según información de la Conama, cerca del 50% del territorio de nuestro país es desierto o está en proceso de desertificación.

- Investigan qué significa proceso de desertificación y tratan de cuantificar la superficie de nuestro país que está afectada por este problema.

Un trabajador o trabajadora destina por ley un 7% de su sueldo para la salud, este dinero lo recibe mensualmente el sistema que ofrece el Estado o bien una Isapre.

- Si la señora María gana habitualmente el sueldo mínimo de aproximadamente 75.000 pesos ¿cuánto dinero le descuentan por concepto de salud en un mes?
- Investigan qué otros descuentos se realizan mensualmente por ley a un trabajador o trabajadora, los porcentajes correspondientes y el destino que se da al dinero.

c) Juegan a calcular porcentajes con la calculadora suponiendo que la tecla de porcentaje no está disponible.

COMENTARIO

En este ejemplo ya se puede trabajar la idea de cálculo de porcentajes por medio de una secuencia de operaciones (con la calculadora o con lápiz y papel). Para calcularlo se puede multiplicar por 0,07 directamente o multiplicar por 7 y luego dividir por 100. Lo central es que los alumnos y alumnas comprendan por qué.

Actividad 8

Interpretan situaciones en las que se presenta información expresadas en porcentajes mayores a 100.

Ejemplo

Leen cada una de las informaciones presentadas; determinan cuál es el 100% en cada caso y responden las preguntas que se presentan a continuación.

Un Oso Pardo (que vive en las montañas de Cantabria, España) al cabo de unos meses de haber nacido alcanza un 200% de su peso inicial. Se sabe que el peso al nacer de ese tipo de osos es de 350 gramos, aproximadamente.

- ¿De qué manera puedes expresar, sin especificar la cantidad exacta, a cuánto correspondería el 200% del peso del oso que se registró al nacer?

- ¿Cómo calcularías el peso exacto del oso después de los meses señalados? Explícalo, no realices el cálculo.
- ¿Cuánto pesaría si logra 250% del peso que tuvo al nacer?

  1994 fue un mal año para la economía de Brasil. Ello se reflejó en la inflación, que alcanzó un poco más de 900%.

- ¿Qué significa que la inflación correspondió a un 900%? ¿De qué otra manera lo puedes expresar ?

COMENTARIO

En las informaciones es muy importante determinar primero sobre qué base se calcularán los porcentajes para luego poder entender un porcentaje mayor. En el caso del oso, es su peso inicial. Usar expresiones que pueden ayudar a imaginar el porcentaje; por ejemplo, el 200% del peso inicial puede expresarse como el doble; así como el 900% correspondería a un alza de nueve veces.

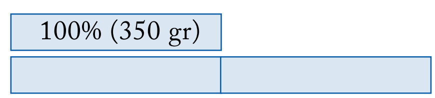
Se recomienda especial cuidado en el lenguaje, ya que aumentar **en 50%** (o 50% más) es equivalente con aumentar **a un 150%**, es decir, es equivalente a preguntarse por el 150% del valor inicial. En el nivel siguiente (8º Año Básico), a propósito de los porcentajes de descuento en el comercio, entre otros, se abordarán en mayor profundidad estas distinciones.

Al usar la tecla porcentaje en una calculadora es claro que el valor que se ingresa primero es lo que se considera como el 100% y, en ese sentido su uso refuerza la importancia del referente (así, si el valor de un objeto, o cualquier otra unidad, aumenta a 150% basta con multiplicar el valor inicial por 1,5)

Tanto la visualización del significado de los porcentajes como de las variaciones se pueden apoyar, también, con representaciones gráficas. Por ejemplo,

Si este rectángulo representa el peso del oso al nacer:

Después de unos meses, su peso sería el doble:



Actividad 9

Resuelven problemas que implican calcular un porcentaje de una cantidad y cantidades totales a partir de un porcentaje de ella; eligen los procedimientos a utilizar y determinan procedimientos generales.

Ejemplos

1. **Leen y comentan la siguiente información.**

De acuerdo a la descripción básica de los niveles sociales realizado en el año 99 (por la Asociación de Institutos de Estudios de Mercado y Opinión AG) se obtiene la siguiente información:

El número total de hogares considerados en el Gran Santiago urbano es de 1.158.009, de los cuales el 10% corresponde a la categoría ABC1 que recibe un ingreso familiar promedio de 2.386.000 pesos mensuales; el 20% de los hogares corresponde a C2, que recibe un ingreso familiar promedio de 870.000 pesos mensuales; el 25% de los hogares corresponde al nivel C3 que recibe un ingreso familiar promedio de 540.000 pesos mensuales; el 35% de los hogares corresponde al D que recibe un ingreso familiar promedio de 310.000 pesos mensuales; y el 10% al E, que recibe un ingreso familiar promedio de 110.000 pesos mensuales.

- Investigan el significado de las categorías utilizadas en la clasificación (ABC1, C2, etc.).
- Elaboran una tabla con los datos y completan los que faltan:

Categorías	Porcentajes	Cantidad de hogares
ABC1	10	
C2	20	
C3	25	
D	35	
E	10	
Todas	**100**	**1.158.009**

- Comparten y discuten los procedimientos que utilizaron para encontrar, en cada categoría, el número de hogares correspondientes.

COMENTARIO

En 6º Año Básico trataron algunos porcentajes (10%, 25%, 50% y 75%) asociados a las fracciones respectivas, lo que sería una estrategia para completar la tabla. Sin embargo, el uso de las razones internas puede resultar muy interesante para comprender mejor el significado de los porcentajes desde el punto de vista de las relaciones proporcionales.

Al comentar los procedimientos usados, la profesora o el profesor puede asociar una de las formas de calcular porcentajes con las proporciones. Para ello se seleccionan los datos de la tabla (pares de razones). Hasta ahora se habían calculado los porcentajes (10%, 25%, 50% y 75%), asociándolos directamente con la escritura y operaciones con fracciones.

A modo de síntesis, se puede volver a la expresión de porcentajes en decimales para establecer un procedimiento directo de cálculo y reforzar el uso de la calculadora.

A partir de una situación como esta, es importante realizar una reflexión respecto a la cantidad de dinero (310 mil pesos de promedio, mensual) de la cuál dispone el 35% de las familias en Chile y para cuánto le alcanza, por ejemplo. Si se agrupan los datos se obtiene que el 45% de las familias en Chile gana, como promedio mensualmente, 350 mil y menos.

2. Leen el siguiente texto y responden las preguntas a partir de él.

En el año 1990 para América Latina en su conjunto la población indígena alcanza aproximadamente a 40 millones de personas, representando algo menos del 10% de la población total y caracterizándose por una alta concentración en ciertos países de la región. Bolivia presenta la mayor proporción de la población indígena respecto al total de sus habitantes, albergando casi 5 millones, lo que significa el 71% del total de su población. Le sigue Guatemala con 66% de población indígena, país en el que también residen algo más de 5 millones.

- Según la información entregada en el texto, ¿en cuántas personas se ha estimado la población de América Latina en el año 90?
- ¿En cuántos habitantes se estima la población total de Bolivia y Guatemala en el año 90?
- Si en la misma publicación se dice que en Chile el 8% de la población correspondería a indígenas, ¿es posible concluir sobre qué total de población se ha considerado ese porcentaje?
- Investiga a qué porcentaje corresponde actualmente la población indígena en nuestro país y a cuáles indígenas corresponde la gran mayoría de ellos.
- A partir de la información entregada, ¿qué otras preguntas podrías plantear?

COMENTARIO

En estas dos situaciones es muy importante apoyar el razonamiento con representaciones gráficas. En el caso (2), por ejemplo, para encontrar la población aproximada de Bolivia a partir de los datos entregados (5 millones de población indígena, que representan el 71% de la población total) se puede utilizar una representación como la siguiente:

71%	29%
5 millones	?

Lo mismo para encontrar, a partir de los datos, la población de América Latina:

10%	90%
40mi	?

La información del primer ejemplo y el texto del ejemplo 2 se ha extractado de la publicación del Instituto de la Mujer, Ministerio de Asuntos Sociales de España, Facultad de Ciencias Latinoamericanas (FLACSO) con colaboración de UNIFEM, UNICEF, ASDI llamado *Mujeres latinoamericanas en cifras. Tomo comparativo.*

Actividad 10

Organizan y analizan información utilizando tablas de frecuencia relativa y construyen gráficos circulares.

Ejemplo

a) Recopilan en diarios o revistas informaciones presentadas en gráficos, incluidos los gráficos circulares.

- Leen y analizan las informaciones; discuten por qué algunas se presentan en gráficos de barras y otras en gráficos circulares.
- Relacionan los porcentajes señalados en los gráficos circulares con la porción del área de la circunferencia (aproximadamente) que ocupan. Por ejemplo, si es el 50% corresponde a la mitad, etc.

COMENTARIO

Los gráficos circulares se utilizan para mostrar frecuencias relativas, es decir, expresadas en porcentajes. Su objetivo es permitir comparar, visualmente, sin necesidad de hacer cálculos, el comportamiento de una variable. Por ejemplo, poder ver, a primera vista, que una categoría es mucho mayor o menor, en términos de preferencia u ocurrencia, que otra; o que se distribuyen de manera muy pareja, etc. Lo más importante es que recurren a una estandarización (en relación a un referente común que, en este caso es 100) y que la comparación no requiere conocer el número de preferencias u ocurrencia de las diferentes categorías. No obstante, uno de los cuidados que es necesario tener es que, en ocasiones, la información puede estar distorsionada por referirse a una cantidad muy pequeña de casos.

b) Realizan una encuesta entre sus compañeros del colegio referente a los tipos de calefacción usados en sus hogares.

- Tabulan la información.
- Completan tablas con frecuencia absoluta y relativa (en porcentajes).
- Hacen un gráfico circular con la información.
- Escriben conclusiones referidas al tipo de calefacción más usada, menos usada, etc.

COMENTARIO

La confección de gráficos circulares sin uso de computadora tiene la intención de practicar el cálculo de porcentajes utilizando proporciones. Lo más importante es que los niños y niñas puedan comprender el problema, determinar los cálculos necesarios y comprender los resultados. Las operaciones mismas pueden resolverlas con una calculadora. Por otra parte, se pretende que aprendan a construir gráficos circulares y, por sobre todo, a comprenderlos.

La encuesta puede incluir una pregunta con alternativas como las siguientes:
En su hogar se utiliza, principalmente, calefacción:

a leña
a parafina
a gas
otros
no hay calefacción

La razón básica para calcular los sectores circulares es 360/100, donde 360 representa un ángulo completo (la circunferencia) y 100 el total. De este modo se puede calcular cuántos grados corresponde a, por ejemplo, 40% u otro porcentaje cualquiera.

Actividades de evaluación

A continuación se proponen algunas actividades y problemas para la evaluación de los aprendizajes esperados de la unidad y que pueden ser incorporadas en su plan de evaluación. Algunas de las actividades están diseñadas para ser trabajadas en grupo.

En la columna de la derecha se especifican algunos indicadores que orientan las observaciones del logro de los aprendizajes.

Ejemplos de actividades y problemas	Indicadores / Observar que:
Analizan diversas situaciones en que existen variaciones en los valores de dos magnitudes involucradas y las clasifican en proporcionales y no proporcionales.	
Ejemplo **1.** Leen cada una de las siguientes situaciones y a partir de la información entregada responde las siguientes preguntas: • ¿Cuáles de ellas muestran variaciones proporcionales? ¿Cuáles no? • Con la información disponible: ¿Es posible contestar las preguntas que se plantean en cada situación? ¿En cuáles sí y en cuáles no? ¿Por qué?	• Identifican las variables y magnitudes involucradas y establecen adecuadamente una relación entre ellas (si existe).
a) La energía que gasta una ampolleta de 60 Watt es equivalente a la que necesita una persona para subir por las escaleras cuatro edificios de 30 pisos. ¿A cuánta energía equivale el gasto de 4 ampolletas de 60 Watt? (Datos proporcionados por la CONAMA).	• Sus argumentos corresponden a descripciones claras de las características de una relación proporcional (directa o inversa) entre dos variables. Por contraste argumentan por qué no lo son, cuando corresponda.

b) La equivalencia entre grados Celsius y grados Farenheit se puede observar en la siguiente tabla:

Grados Celsius	Grados Farenheit
20	68
10	50
5	39
0	32

¿A cuántos grados Farenheit equivale 2,5 grados Celsius?

- Realizan cálculos para decidir si es posible o no resolver. No se basan en argumentos generales.

c) Un árbol absorbe en promedio 12 kilos de dióxido de carbono al año. Esto corresponde a lo que emite un automóvil particular durante todo un año. Si en Santiago hay 500 mil autos, ¿cuántos árboles debería tener como mínimo la ciudad para que pudiera ser absorbido el dióxido que ellos emiten en un año? (Datos proporcionados por la CONAMA).

d) El médico que atiende a Patricia lleva un registro de su estatura y peso con el fin de estudiar su evolución durante la pubertad. El registro es el siguiente:

Edad	Estatura	Peso
11 años	142,0 cm	35,8 kg
12 años	147,0 cm	39,8 kg
13 años	152 cm	44,2 kg
14 años	153,4 cm	46,5 kg
15 años	155,4 cm	45, 0 kg

Patricia se pregunta: ¿Con estos datos podré anticipar la estatura y peso exactos que tendré a los 16 años?

- A sus argumentos generales relativos a las características de las relaciones de proporcionalidad agregan que, en casos particulares como éste, no existe una relación directa y permanente entre las dos variables.

Resuelven situaciones que implican determinar variaciones proporcionales directas e inversas y calcular valores desconocidos.

Ejemplos

1. En una caja de leche que compró Germán se lee la siguiente información nutricional:

Cada 100 mL de leche contiene:

Energía:	36	kal
Sodio:	48	mg
Potasio:	165	mg
Calcio	128	mg
Fósforo:	103	mg
Magnesio:	12	mg

a) ¿Cuántos mg de potasio contiene una caja de leche de un litro?

¿Cuántos mg de potasio contiene una taza de leche (250 mL)?

b) Germán hizo una tabla con los mg de calcio que contienen los distintos envases de esta misma leche. Léela e indica si los valores son correctos y corrígelos si es necesario:

Mg de calcio en la leche

100	mL	128	mg
200	mL	256	mg
500	mL	612	mg
1.000	mL	1.224	mg

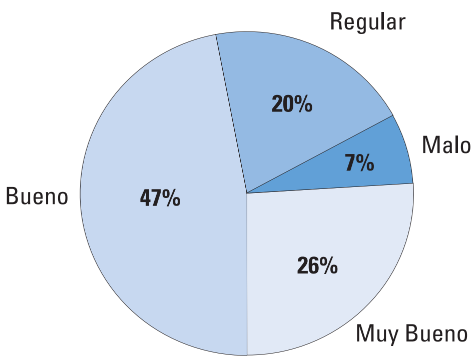
c) Una joven o un joven de tu edad debe consumir diariamente 2.000 calorías aproximadamente. Si bebe un vaso de 200 mL de esta leche en la mañana y otro en la tarde ¿Qué porcentaje de las calorías de su dieta diaria la consume en leche?

Explica cómo llegaste a una solución.

- Leen adecuadamente los datos en una tabla.
- Muestran comprender que existe una relación de proporcionalidad entre las magnitudes involucradas, utilizando un procedimiento adecuado para obtener la respuesta.
- Relacionan datos de dos tablas, detectan eventuales errores y los corrigen.
- Seleccionan y usan adecuadamente los datos entregados en una tabla para resolver un problema.
- Tanto en la explicación como en los cálculos identifican correctamente el cien por ciento con el total y pueden calcular el porcentaje.
- Utilizan resultados intermedios para encontrar una respuesta final.
- Pueden describir y justificar procedimientos para calcular porcentajes.

Interpretan información entregada en gráficos circulares y a partir de esa información construyen tablas de frecuencia relativa y absoluta.

Ejemplo
Un diario local realizó una encuesta sobre la opinión que tenían sus lectores con respecto a su nuevo suplemento *Dominical*. La encuesta se realizó telefónicamente a un grupo de 1500 suscriptores. Los resultados fueron publicados en un gráfico circular, como el siguiente:



A partir de la información entregada a través del gráfico realiza una tabla de frecuencias absolutas y relativas y luego contesta las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el nivel de aceptación del suplemento dominical?
- ¿Cuántas de las personas encuestadas opinaron que el suplemento era malo?
- ¿Cuántos de los suscriptores encuestados opinaron que el nuevo suplemento era bueno o muy bueno?
- Propón al menos dos preguntas que te parecen interesantes que se podría hacer una lectora al observar el gráfico. Entrégale las respuestas.

- Pueden extraer información de un gráfico circular.
- Relacionan diferentes categorías para construir una que no está especificada en un gráfico (agrupan datos).
- A partir de un gráfico circular y el dato de casos considerados para su construcción pueden reconstruir una tabla de frecuencias absolutas.
- Interpretan información de un gráfico circular para responder preguntas directamente relacionadas con ella.
- Frente a información entregada en un gráfico circular y una breve descripción del estudio a que se refiere, pueden proponer preguntas nuevas posibles de responder con ella.

Interpretan informaciones expresadas en porcentajes y calculan porcentajes para resolver problemas.

Ejemplo
En Chile se registraba en el año 1990 una población de 13.099.513 habitantes, de los cuales 6.471.912 correspondían a hombres y 6.627.601 a mujeres. Si se expresa en porcentajes las mujeres correspondían, aproximadamente, al 50,6%.

Respecto de la distribución por edades de la población femenina y masculina, ese año se registraban los siguientes datos:

	0 a 4 años	5 a 14 años	15 a 49 años	50 años y más
Mujeres	10,6%	18,6%	53%	17,8%
Hombres	11,3%	19,7%	54,3%	14,7%

Según los datos registrados en la tabla:

- ¿Qué porcentaje representan los hombres en la población del año 1990?
- Sólo observando la tabla y sin hacer cálculos, ¿a qué edad se concentran la mayor cantidad de mujeres? ¿Coincide esta tendencia en los hombres?
- Con la información entregada, ¿puedes saber exactamente la cantidad de personas por sexo para cada uno de los rangos de edad presentados en la tabla? Explica por qué.
- ¿Cuántas mujeres menores de 5 años había el año 90?
- ¿Cuántos hombres mayores a 15 años había el año 90?
- ¿Cuántos hombres y mujeres menores de 5 años había el año 90?
- A partir de la información entregada, ¿qué otras preguntas podrías plantear?

- Comprenden la diferencia entre datos entregados como frecuencias absolutas y como porcentajes.
- Leen e interpretan adecuadamente los datos identifican los dos referentes.
- Discriminan entre aquellas preguntas que pueden ser respondidas con los datos y aquellas que no.
- Identifican los datos necesarios para calcular y los utilizan adecuadamente.
- Plantean preguntas que efectivamente se puedan responder con la información de la tabla y del enunciado de la situación.

Unidad 5

Potencias en la geometría y en los números

TIEMPO ESTIMADO: 5-6 SEMANAS

Contenidos

Potencias de base y exponente natural

- Interpretación de potencias de exponentes 2 y 3 como multiplicación iterada.
- Asociación de las potencias de exponente 2 y 3 con representaciones en 2 y 3 dimensiones respectivamente (áreas y volúmenes).
- Investigación de algunas regularidades y propiedades de las potencias de exponente 2 y 3.
- Investigación sobre aplicaciones prácticas del Teorema de Pitágoras.

Aprendizajes esperados

Las alumnas y los alumnos:

1. Entienden las potencias como una forma de expresar cantidad y que implican una multiplicación iterada.
2. Visualizan geométricamente las potencias de exponente dos y de exponente tres y representan situaciones diversas.
3. Formulan conjeturas y desarrollan procesos sistemáticos para mostrar su factibilidad, utilizando recursos geométricos y numéricos, referidas a regularidades asociadas al cuadrado y al cubo de un número y a relaciones geométricas en triángulos rectángulos.
4. Utilizan de manera pertinente el Teorema de Pitágoras para la resolución de problemas cotidianos, del ámbito de otras disciplinas y de oficios.

Orientaciones didácticas

En esta unidad se tratan las potencias como una notación que permite expresar cantidades de manera sintética. En el Nivel Básico 5 se limita el estudio de las potencias de base natural cualquiera y exponentes dos y tres. El propósito de esta restricción es entregar a los niños y niñas múltiples oportunidades para comprender la diferencia entre las adiciones iteradas (uno de los aspectos en que se ha estudiado la multiplicación) y la multiplicación de factores iguales. Un aspecto central del trabajo que se propone es presentar las potencias cuadradas y cúbicas en contextos tanto numéricos como geométricos.

En los contextos numéricos se proponen situaciones que permitan expresar cantidades y operar con ellas de manera comprensiva.

El énfasis de las situaciones en contextos geométricos está en la comprensión de los efectos que tiene elevar una medida al cuadrado o al cubo, ligadas a longitudes (una dimensión), áreas (dos dimensiones) y volúmenes (tres dimensiones). A partir del caso particular de un cuadrado, se trata de que los alumnos y alumnas comprendan, y lleguen a tener imágenes mentales sólidas, de que si se duplica, por ejemplo, la longitud de sus lados, el área se multiplicará por cuatro (es decir, por 2 al cuadrado); si se triplica, el área se multiplicará por 9 (es decir, por tres al cuadrado). Se propone trabajar de manera análoga el caso de un cubo.

Un aspecto muy importante del trabajo está en otorgar a los niños y niñas oportunidades múltiples para desarrollar procesos sistemáticos de resolución de problemas y de búsqueda de regularidades aritméticas y geométricas. Y de este modo no sólo resuelvan problemas ligados a contextos cotidianos, sino que también avancen en el desarrollo de sus capacidades para probar, fundamentar y explicar determinadas propiedades matemáticas.

Ligado al trabajo con potencias se proponen actividades relativas al Teorema de Pitágoras. Esencialmente se trata de que comprendan las relaciones particulares que se dan entre los lados de un triángulo rectángulo cualquiera y las utilicen en la resolución de situaciones de cálculo de distancias no susceptibles de ser medidas directamente.

En este sentido, se invita a alumnas y alumnos a realizar indagaciones sobre el uso del Teorema de Pitágoras, muchas veces intuitivamente o sin que se haya estudiado formalmente, en la vida cotidiana y de trabajo de personas adultas. Por ejemplo, los carpinteros y albañiles, quienes lo utilizan con mucha propiedad para dibujar ángulos rectos.

Actividades de aprendizaje

Actividad 1

Analizan situaciones y resuelven problemas que se puedan representar por arreglos cuadrados (o por cuadrados) asociando el número de filas o columnas (o el lado del cuadrado) y el número total de elementos (o el área del cuadrado) con la base de una potencia de exponente dos y el valor de la potencia, respectivamente.

Ejemplos

1. **Leen, analizan y resuelven la siguiente situación.**

La familia Gómez de la VI Región decidió ampliar su negocio de venta de hortalizas. Han planeado producir y vender almácigos de distintas verduras, para lo cual cuentan con unos recipientes de 30 cm por 30 cm.
En cada almácigo se deberán ubicar las semillas en hileras, de tal forma que haya igual cantidad de ellas a lo largo que a lo ancho. Es necesario determinar cuántas semillas se necesitan para cada almácigo, considerando que deben ser ubicadas a una distancia razonable una de otra, de modo que tengan un espacio adecuado para crecer.

a) Averiguan sobre el cultivo de almácigos, tipos de verduras de las que se puede hacer almácigos, etc.

b) Representan en cuadrículas, redes de puntos o papel cuadriculado los almácigos y las posibilidades de ubicación de distintas cantidades de semillas.

c) Analizan las representaciones y responden preguntas como las siguientes:
- ¿Cuántas semillas como mínimo es razonable ubicar en el almácigo?
- ¿Cuántas semillas como máximo es razonable ubicar en el almácigo?
- ¿Qué criterios se pueden considerar para determinar cantidades adecuadas de semillas por almácigos?

d) Establecen relaciones entre la cantidad de semillas por lado del almácigo y la cantidad de semillas en total que se necesitan para cada almácigo.

e) Determinan la cantidad de semillas necesarias para almácigos que contengan 10, 11, 12, etc. semillas por cada fila y columna. Expresan las cantidades utilizando potencias.

COMENTARIO

Para analizar sistemáticamente la situación y dar respuesta a las preguntas pueden ir completando una tabla como la que se presenta a continuación:

Cantidad de semillas por fila	Cantidad de semillas por columna	Total de semillas
1	1	1
2	2	4
...		
30	30	

En el diccionario se define Almácigo como "Lugar donde se siembran semillas de plantas que hay que trasplantar."

2. Organizados en grupos, arman cuadrados de distintos tamaños a partir de otros más pequeños, previamente construidos.
Materiales: Un set de 49 cuadrados (como mínimo) de 2 cm por lado.

a) Cada grupo arma cuadrados con distinta cantidad de cuadraditos. Determinan cuánto es el mínimo de cuadraditos que se requieren para formar otro más grande y relacionan la longitud del lado del cuadrado mayor con la longitud del pequeño.

b) Analizan situaciones como:

- Si se aumenta en una unidad el lado del cuadrado ya formado (que puede haberse construido con 2; 3; 4 o más cuadraditos por lado), ¿cuántos cuadraditos tiene el nuevo cuadrado?

- Si se aumenta en dos unidades el lado de un cuadrado ya formado, ¿cuántos cuadraditos tiene el nuevo cuadrado? Y si se aumenta en tres, en cuatro y así sucesivamente? (Nota: cada unidad corresponde a la longitud de los cuadrados iniciales).

c) Determinan la cantidad de cuadraditos necesarios para construir cuadrados de lado 2, 3, 4, 5, 6, 7 unidades. Establecen relaciones entre la cantidad de cuadraditos por lado y la cantidad total de cuadraditos necesarios para formar otro cuadrado.

COMENTARIO

Para analizar sistemáticamente la situación y dar respuesta a las preguntas pueden ir completando una tabla como la que se presenta a continuación:

Cantidad de cuadraditos por fila	Cantidad de cuadraditos por columna	Total de cuadraditos
1	1	1
2	2	4
3	3	9
7	7	49

d) Determinan la cantidad de cuadraditos necesarios para formar cuadrados de lado 8, 9, 10, 11 unidades por lado, etc. y comprueban construyéndolos o dibujándolos.

e) Concluyen un procedimiento para establecer el total de cuadraditos del cuadrado. Expresan las cantidades como potencias.

COMENTARIO

Para obtener el material necesario cada alumno o alumna puede confeccionar previamente aproximadamente 10 cuadrados.

Tanto en el ejemplo 1 como en el 2, se sugiere introducir la noción de potencias a partir de la conclusión respecto de un procedimiento que permite calcular el total de semillas necesarias para cada almácigo (ejemplo 1) y total de cuadraditos para formar los cuadrados (ejemplo 2).

Actividad 2

Analizan situaciones y resuelven problemas que se puedan representar por arreglos cúbicos (o por cubos) asociando el lado, alto o ancho del arreglo (o la arista del cubo) con la base de una potencia y el número total de elementos (o el volumen del cubo) con el valor de la potencia, respectivamente.

Ejemplo

Organizados en grupos, arman cubos de distintos tamaños a partir de otros más pequeños, previamente construidos.
Materiales: Un set de mínimo 125 cubos de 2 cm. de arista (cada miembro del grupo puede aportar 10, por ejemplo).

a) Los grupos arman cubos con distintas cantidades de cubitos. Determinan la cantidad mínima de cubitos necesaria para formar otro de mayor tamaño y relacionan la longitud de las aristas del cubo pequeño con la el cubo mayor.

b) Analizan situaciones como:
   - Si se aumenta en una unidad la arista de un cubo ya formado (que puede tener 2; 3; 4 o más cubitos por arista), ¿cuántos cubitos tiene el nuevo cubo?
   - Si se aumenta en dos unidades la arista de un cubo ya formado, ¿cuántos cubitos tiene el nuevo cubo? Y si se aumenta en tres, cuatro, etc.? (Cada unidad corresponde a la longitud de la arista de los cubos iniciales).

c) Determinan la cantidad de cubitos necesarios para construir cubos de arista 2, 3, 4, 5 unidades. Establecen relaciones entre la cantidad de cubitos por arista y la cantidad total de cubitos necesarios para formar otro cubo.

COMENTARIO

Para analizar sistemáticamente la situación pueden ir completando una tabla como ésta:

Cantidad de cubitos por fila	Cantidad de cubitos por columna	Cantidad de cubitos de altura	Cantidad total de cubitos necesarios

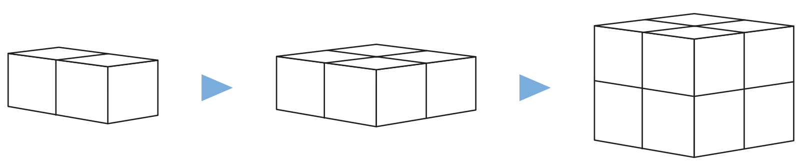
d) Predicen la cantidad de cubitos necesarios para formar cubos de arista 6,7, 8, 9, 10 o más unidades.

e) Discuten y determinan un procedimiento rápido para establecer el total de cubitos del cubo.

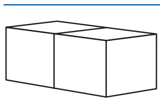
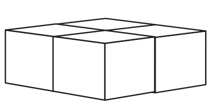
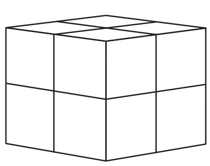
COMENTARIO

Para obtener el material necesario, en caso de no tenerlo, cada niño o niña puede confeccionar, previamente, unos 10 cubitos.

Con respecto a la secuencia de construcción de los cubos se sugiere comenzar por la formación de una placa de forma cuadrada, que corresponde a la potencia al cuadrado y luego superponiendo varias de estas placas cuadradas iguales formar finalmente un cubo.
En el dibujo se muestra un ejemplo de cómo se forma el cubo de arista 2 unidades:



La tabla anterior se puede complementar con otra como la siguiente, la cual recoge la asociación con las potencias en forma simultánea y algunas asociaciones verbales a la construcción.

Representación gráfica	Expresión numérica	Volumen y valor de la potencia
	2 cubitos	2 cubitos
	El doble del anterior o 2^2 cubitos	4 cubitos
	El doble de 2 • 2 ó 2^3 cubitos	8 cubitos

En el ejemplo, al establecer un procedimiento que permite calcular el total de cubitos se sugiere trabajar la noción de potencias como multiplicación de factores iguales.

Se asocia el valor numérico de la potencia con el volumen del cubo (expresado en la cantidad total de cubitos); la base, con la longitud de la arista del cubo, y el exponente, con las tres dimensiones del cubo: largo, ancho y alto.

Actividad 3

Resuelven problemas -geométrica y numéricamente- y los analizan para observar el efecto que tiene en el área de cuadrados y en el volumen de cubos, y en las potencias que los representan, el hacer variar sistemáticamente la longitud de sus lados y aristas, respectivamente. Establecen conclusiones en relación con las potencias de exponente dos y de exponente tres.

Ejemplo

Confeccionan en papel cuadriculado u otro material, tarjetas cuadradas en las cuales sucesivamente se aumente en una unidad el lado del cuadrado. Puede ser hasta 12 unidades de lado (como unidad se puede determinar 1 cm u otra medida arbitraria).

a) Escriben una potencia de exponente 2 para representar el área de cada cuadrado, tal como ya lo han realizado.

- Registran la medida del lado de cada uno de los cuadrados sucesivos y su área en una tabla como la siguiente:

Medidas del lado del cuadrado (en la unidad escogida)	**Área del cuadrado (valor numérico de la potencia) en unidades al cuadrado**
1 **+ 1** **2** **+ 1** **3** **+ 1** **4**	**1** **+ 3** **4** **+ 5** **9** **+ 7** **16**
Aumento del lado del cuadrado	Aumento del área del cuadrado

- Observan cómo el lado del cuadrado, en este caso, aumenta en 1 unidad, sin embargo el área correspondiente aumenta en un número diferente a 1. Buscan explicaciones.
  ¿Cómo pueden explicar que el aumento del lado y el del área no sea el mismo? Es decir, ¿por qué si se duplica el lado no se duplica el área del cuadrado?

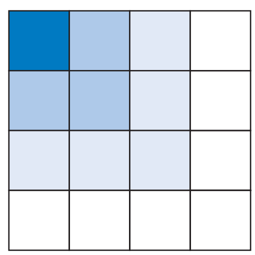
COMENTARIO

A través de la actividad se apunta a comprobar lo que en NB4 descubrieron en cuanto a **cómo aumenta** el lado del cuadrado en relación al área correspondiente y asocien esto a las potencias, es decir 3 • 3 =9 como $3^2 = 9$.

En cuanto a la variación experimentada, es importante darse cuenta que el lado y el área aumentan en distinta razón.

En la tabla anterior se ve cómo, aunque el aumento es siempre de 1 unidad (puede ser de 1 cm) el área va variando en 3; 5; 7; 9, etc. Es decir, se genera una secuencia de números impares.

- Complementan su análisis superponiendo las tarjetas de la siguiente manera. Observan y responden.



Van respondiendo preguntas como:
¿Cuántas filas y columnas aumentan cada vez?
Si cada fila y columna tiene la misma cantidad de cuadraditos, ¿cómo se podría explicar que la diferencia siempre corresponda a números impares?
¿Sucede siempre lo mismo cuando se aumenta en un solo cuadradito la longitud de cada lado para formar un cuadrado más grande?

COMENTARIO

En el dibujo sólo se han considerado los cuadrados hasta el 4, pero se entiende que son más.

Se sugiere hacer una verificación tanto numérica como geométrica (calculando y dibujando).

Se pide justificar que la secuencia de las diferencias sucesivas es impar porque es importante establecer una conjetura y nuevamente confirmar esta conclusión geométricamente.

b) Analizan la tabla anterior comparando la variación tanto de la longitud del lado del cuadrado como del área en **relación al primer cuadrado** (es decir, observan lo que ocurre al duplicar, triplicar, cuadriplicar, etc. la longitud del cuadrado original de lado igual a 1 cm, por ejemplo). Pueden confeccionar una nueva tabla.

El análisis se puede orientar con preguntas como:

- Si la longitud del lado del cuadrado original se duplicó, ¿por cuánto se multiplicó el área?
- Si la longitud del lado se triplicó, ¿por cuánto se multiplicó el área?
- Si la longitud se multiplicara por 10, ¿por cuánto se multiplicaría el área?
- ¿Qué ocurriría si el lado del cuadrado original midiera, por ejemplo, 2 cm?

COMENTARIO

Es importante recordar que en el nivel anterior (NB4) han observado este fenómeno. Ahora, se trata de llevarlos a comprender el comportamiento de las potencias a partir de una experiencia geométrica.

En este caso van a obtener valores como:

el lado se multiplica por 2 el área se multiplica por 4

el lado se multiplica por 3 el área se multiplica por 9, etc.

Se puede introducir la notación de potencias para expresar el fenómeno: el lado se multiplica por 2, el área se multiplica por 2 al cuadrado; el lado se multiplica por 3, entonces el área se multiplica por 3 al cuadrado, etc.

c) Repiten la experiencia, esta vez partiendo de un cubo de arista igual a 1 (unidad cualquiera o centímetro). Escriben la secuencia numérica que se forma a partir de aumentar en una unidad, sucesivamente, la longitud de la arista y calculan los volúmenes correspondientes. Establecen conclusiones.

Registran sus cálculos en una tabla como la siguiente:

Arista en cm	Volumen del cubo en cm^3
1 cm	1
2 cm	$8 = 2^3$
3 cm	$27 = 3^3$

COMENTARIO

En este caso, se observa claramente cómo al multiplicar la arista, que inicialmente mide 1 cm, por 2, el volumen se multiplica por 2 al cubo; si se triplica la arista, el volumen se multiplica por 3 al cubo, etc.

Con el fin de orientar la elaboración de argumentos para justificar las conclusiones se puede complementar la actividad pidiéndoles hacer el proceso con material concreto.

Actividad 4

Resuelven problemas de combinaciones por medio de multiplicaciones sucesivas de factores iguales y los asocian a las potencias de exponente 3.

Ejemplo

Leen en grupo el siguiente problema. Buscan una estrategia que les ayude a comprender la estructura del juego y encontrar soluciones.

Benjamín está guardando un juego de madera de su hermana menor y decide contar los bloques y verificar si faltan piezas. Cuenta 23 bloques, pero aún desconoce el total de piezas del juego completo.

Para su suerte encuentra un folleto adjunto que dice:

"Este maravilloso set de bloques consta de piezas de 5 formas (círculos, triángulos, cuadrados, rombos y rectángulos) y cada pieza viene en 5 colores distintos".

- ¿A qué conclusión llegó Benjamín?

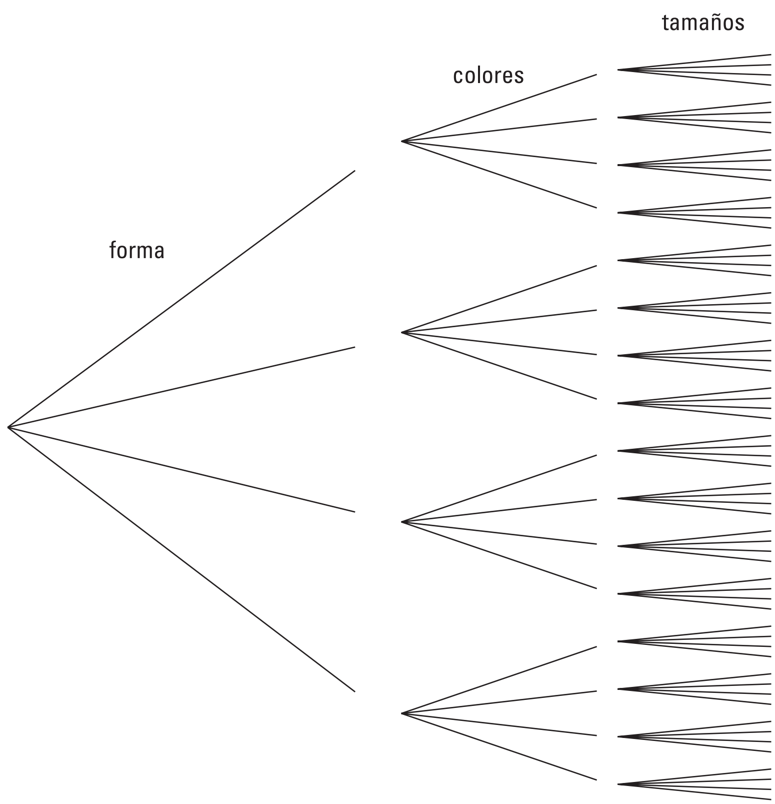
a) A partir de lo anterior, a Benjamín se le ocurre diseñar un juego con más piezas para que su hermana se entretenga. A la estructura anterior le agrega la posibilidad de que las fichas sean, además, de 5 tamaños distintos.
¿Cuántas fichas tendrá el nuevo juego?

b) Diseñan un nuevo juego de estructura similar al de la situación anterior (es decir, con tres atributos). En este caso el juego tendrá 64 piezas en total.
Preguntas sugeridas para orientar el diseño:

- ¿Se puede expresar la estructura de estos juegos a través de potencias?
- ¿De qué manera rápida, conociendo la estructura del juego y el total de piezas, es posible saber la cantidad de piezas de cada tipo que debe haber?

COMENTARIO

Un esquema que ayuda a la comprensión de la estructura del juego puede ser:



Las piezas pueden ser fichas, moldes de muñecas de cartón que varían sus vestimentas (blusas, faldas y zapatos) y colores; peluches que varían en tipos de animales, tamaños y colores; también pueden ser modelos de automóviles que varían de marcas, colores y tamaños.

Tal como en los niveles anteriores, la noción de multiplicación se ha enfocado desde diferentes modelos (rectangular, y de combinaciones, en los ejemplos sugeridos).

Este tipo de problemas es importante por cuanto permite ampliar la visión de las potencias (multiplicación de factores iguales) al asociarlas no sólo con área o con arreglos bidimensionales.

En el ejemplo, la repetición de factores es casual (el juego podría tener una estructura diferente). Se sugiere incorporar otras situaciones tales como el aumento de una población de bacterias que se producen por división. Para ello se puede coordinar con la profesora o profesor de Estudio y Comprensión de la Naturaleza.

Actividad 5

A través de juegos, practican estrategias para encontrar el valor de potencias cuadradas o el valor de los factores (de una potencia cuadrada). Establecen conclusiones en asociación con áreas de cuadrados y con la longitud de sus lados.

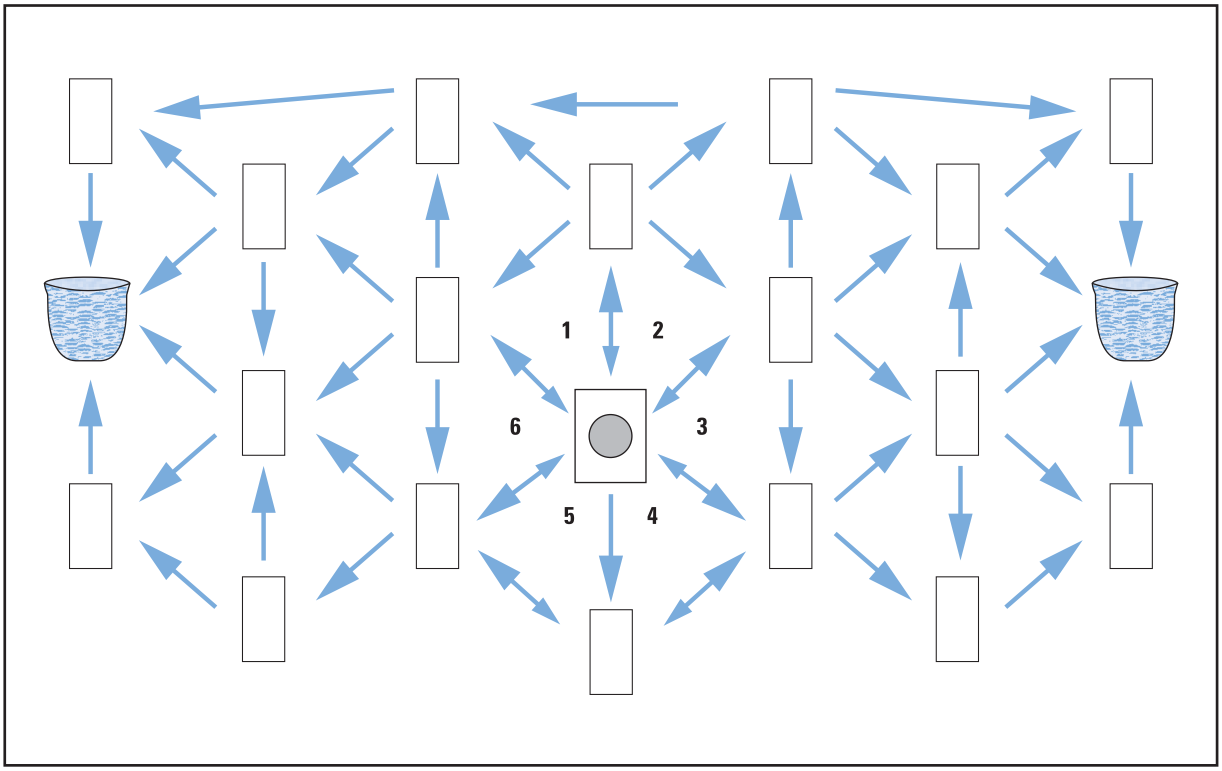
Ejemplos

1. **El curso se separa en grupos y juegan a encestar una pelota en un tablero de acuerdo a las instrucciones que se presentan.** Una vez que juegan las veces convenidas, comparten algunas estrategias usadas por los equipos y establecen conclusiones.

   Materiales para cada grupo:
   - Set de tarjetas con 25 preguntas relativas a potencias (se adjuntan algunos ejemplos).
   - Set de tarjetas con las respuestas respectivas.
   - Tablero y fichas de dos tipos para cada equipo.
   - Un dado.

   Instrucciones:
   - Cada equipo quiere encestar en la cesta contraria. El que lo hace por primera vez gana.
   - El grupo se divide en dos equipos y elige un símbolo que los identifique.
   - Se sortean la primera jugada y el aro (arco) en que encestará cada uno, partiendo del recuadro central. Parte quien obtiene el número mayor.
   - El jugador que tiene la ficha sólo puede avanzar en las direcciones que indican las flechas y, en la primera jugada debe hacerlo por el camino indicado, según el número del dado.
   - Para avanzar debe responder correctamente la pregunta de la tarjeta, en caso de equivocarse le entrega la pelota al otro equipo.
   - Cada equipo tiene derecho en dos oportunidades al *consejo del entrenador o entrenadora* para discutir procedimientos de cálculo, en un tiempo mutuamente acordado por ambos equipos.
   - Los participantes pueden agregar otras reglas al juego siempre que sea de consenso.

Tablero



Ejemplos de tarjetas con preguntas.

El área de una chacra en forma cuadrada corresponde a 196 m^2.
¿Cuáles son las medidas del terreno?

Si tengo 8 filas con 8 sillas cada una ¿Cuántas sillas hay en total?
¿Puedo escribir el total de sillas usando potencias?

Yo pensé en un cuadrado con 144 cm cuadrados de área.
¿Cuánto mide cada lado del cuadrado?

En la fábrica de don “Sata” se producen y envasan frascos para diversos usos. Pero sólo existen cajas de base cuadrada para envasar -porque dice que le traen buena suerte- en las que se pueden poner desde 6 frascos por cada lado hasta 20 (los que no se pueden apilar). Tiene 250 frasquitos que quiere envasar en una sola caja.
¿Cuál caja escogerías y por qué?

¿Con cuáles de los siguientes montones de fichas se pueden hacer arreglos cuadrados?

42 fichas   45 fichas   49 fichas

El pastelero quiere ubicar los pequeños pasteles en las bandejas de manera que se vean ordenados.
¿Cuántos pastelitos puede ubicar en arreglos cuadrados?

7 filas   8 filas   9 filas

¿Con cuáles de los siguientes montones de fichas se pueden hacer arreglos cuadrados? (se entiende por arreglo cuadrado a aquellas formaciones que permiten colocar igual cantidad de filas y columnas).

30 fichas   36 fichas   40 fichas

¿Cuál es el valor numérico de?:

11^2

4^2

10^2

¿Qué superficie cubre cada uno de estos pastelones cuadrados?

30 cm $\{\square$

50 cm $\{\square$

1 m $\{\square$

COMENTARIO

Es importante motivar el intercambio de estrategias de cálculo rápido en caso de no encontrar valores exactos (como en la tarjeta que pide escoger una caja de forma cuadrada para ubicar 250 frasquitos, por ejemplo).

En la síntesis de la actividad se podría introducir la noción de raíz cuadrada, incluyendo su notación y trabajar con la calculadora. Esta noción se usará al trabajar con el Teorema de Pitágoras.

2. **El curso se separa en grupos y confeccionan en tarjetas blancas, un *memorice.*** Este puede tener la cantidad de tarjetas que se estime conveniente de acuerdo a los participantes. Cada uno inventa al menos dos tarjetas - una con la pregunta y la otra con la respuesta. Las preguntas se refieren a cálculos de valores de potencias de exponente dos, o bien a la base de la potencia si se entrega el valor numérico y el exponente 2.
Una vez que juegan hasta encontrar al menos un ganador, comparten en el curso algunas estrategias tanto para memorizar como para hacer los cálculos rápidos. Establecen conclusiones.

3. **En grupos juegan al Dominó.**

Instrucciones:

- Confeccionan las tarjetas para el juego (o utilizan un juego preparado previamente por el profesor o profesora).
- Siguen las reglas de un Dominó convencional.
- Ejemplos de tarjetas que podría tener el juego:

Es lo mismo que 4^3	$8^2 = 64$	49	3
¿Cuál es el valor numérico de 7^2?	El área de una chacra cuadrada es de 121 m^2. ¿Cuáles son las medidas del terreno?	Si tengo 8 filas con 8 sillas cada una ¿Cuántas sillas en total hay?	Tengo un terreno que tiene 100 metros cuadrados. Entonces, cada lado mide un número que elevado al cuadrado es 100.
10	3^2	9	$9^{\square} = 81$
2	4^2	2^4	$\square^3 = 27$
11 x 11	3^2	81	Equivale a escribir: 4 x 4 x 4

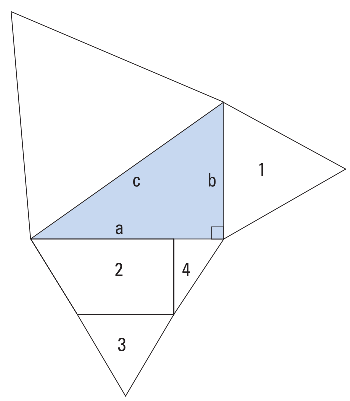
Actividad 6

Trabajan con materiales concretos (del tipo rompecabezas), descomponiendo y componiendo polígonos regulares sobre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo; analizan relaciones entre sus áreas.

Ejemplos

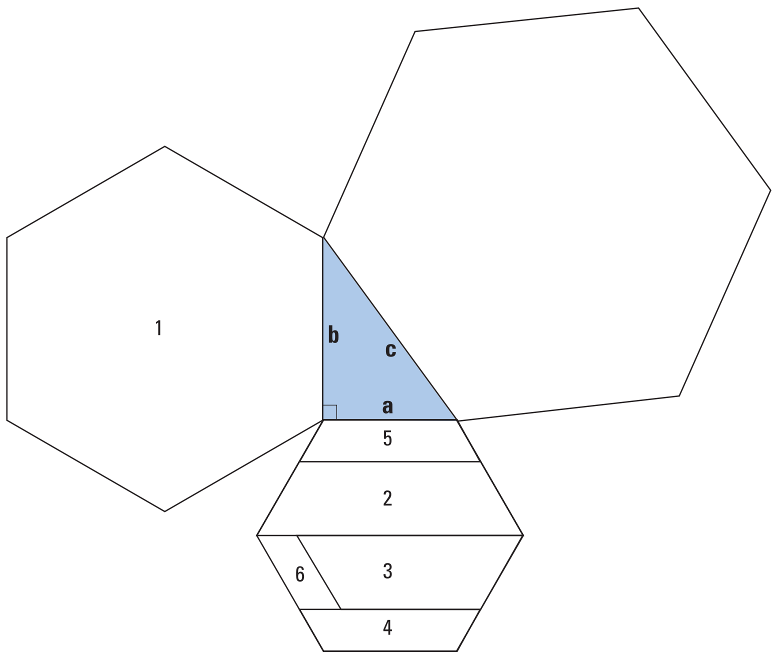
Trabajan en grupos con plantillas de rompecabezas (ver Anexo 2).

a) Observan el siguiente dibujo (entregado en una plantilla recortable. Ver Anexo 2).



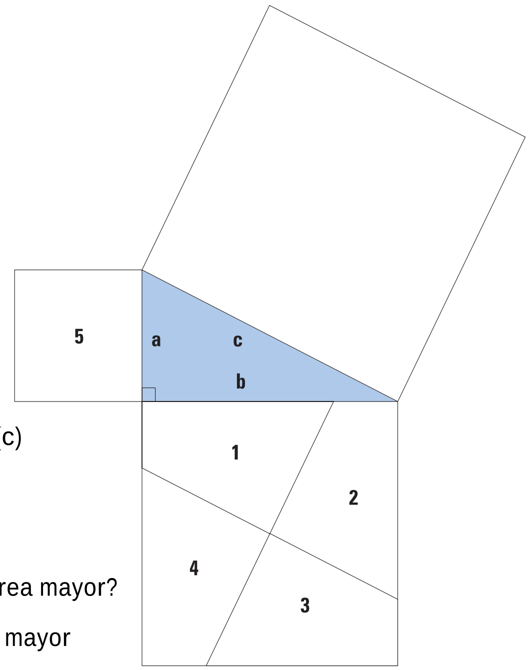
- Analizan el tipo de triángulos del dibujo:
  ¿Qué tipo de triángulo son los que se han dibujado sobre los catetos (a y b) y la hipotenusa (c) del triángulo rectángulo?
- Observan las áreas de los triángulos.
  ¿Cuál es el que tiene menor área? ¿Cuál tiene el área mayor?
  ¿Creen que es posible cubrir el área del triángulo mayor con los dos triángulos sobre los catetos a y b?
  Recortan los triángulos como indican las piezas e intentan cubrir la superficie del mayor.
- Establecen una conclusión que relacione las áreas de los triángulos equiláteros formados sobre los catetos y el área del triángulo equilátero formado sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo original.

b) Repiten la experiencia con una nueva plantilla como la siguiente (ver Anexo 2).



- Analizan el tipo de polígono del dibujo:
  ¿Qué tipo de polígonos son los que se han dibujado sobre los catetos (a y b) y la hipotenusa (c) del triángulo rectángulo?
- Observan las áreas de los hexágonos regulares:
  ¿Cuál es el que tiene menor área? ¿Cuál tiene el área mayor?
  ¿Creen que es posible cubrir el área del hexágono mayor con los dos hexágonos dibujados sobre los catetos a y b?
  Recortan los hexágonos como indican las piezas e intentan cubrir la superficie del mayor.
- Establecen una conclusión que relacione las áreas de los hexágonos regulares formados sobre los catetos y el área del hexágono regular formado sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo original.

c) Realizan una nueva experiencia trabajando con la plantilla siguiente (ver Anexo 2):



- Analizan el tipo de polígono del dibujo:

  ¿Qué tipo de polígonos son los que se han dibujado sobre los catetos (a y b) y la hipotenusa (c) del triángulo rectángulo?
- Observan las áreas de los cuadrados:

  ¿Cuál es el que tiene menor área? ¿Cuál tiene el área mayor? ¿Creen que es posible cubrir el área del cuadrado mayor con los dos cuadrados dibujados sobre los catetos a y b?

  Recortan los cuadrados como indican las piezas e intentan cubrir la superficie del mayor.
- Escriben una conclusión que relacione las áreas de cuadrados formados sobre los catetos y el área del cuadrado formado sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo original.

d) Discuten las experiencias realizadas e imaginan lo que podría ocurrir si el triángulo sobre el cual se han dibujado polígonos regulares semejantes (en cada caso diferentes) no fuera rectángulo. Apoyan o refutan sus conjeturas a partir de dibujos.

- Escriben una conclusión -que es una conjetura y no una conclusión general, la cual requeriría de una demostración- respecto de la relación entre las áreas de los polígonos regulares construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo con el área del polígono regular construido sobre la hipotenusa.

COMENTARIO

Es muy importante que los niños y las niñas realicen repetidamente la experiencia con el fin de que vayan avanzando en sus conclusiones. No es esperable que las obtengan de manera inmediata. Puede apoyarse la actividad trabajando con dibujos en papel cuadriculado.

Finalmente, pueden concluir que, **al menos para estos casos** (una conclusión general respecto de los cuadrados se obtendrá en las actividades que siguen y será validada por la profesora o profesor a través de una demostración simple), el área del polígono regular construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los polígonos regulares (semejantes al anterior) construidos sobre los catetos.

En la actividad que sigue se trabajarán las mismas ideas pero a partir de ejemplos numéricos. Eventualmente ambas actividades podrían desarrollarse de manera simultánea. Es decir, incorporar la visualización y análisis gráfico y concreto a situaciones numéricas.

Actividad 7

Desarrollan y analizan procedimientos numéricos para verificar que la suma de las áreas de los cuadrados construidos a partir de los catetos es equivalente a la del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo cualquiera.

Ejemplo

A partir de preguntas propuestas buscan una forma de comprobar numéricamente la conclusión obtenida anteriormente respecto de los cuadrados, es decir, que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

- Comprueban numéricamente el Teorema de Pitágoras dibujando y calculando el área de cuadrados construidos sobre los catetos y la hipotenusa de **distintos triángulos rectángulos** (es decir, de diferentes tamaños).
- Establecen relaciones entre los datos obtenidos y analizan la siguiente conjetura: *cualquiera sea el triángulo rectángulo, se cumple que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual a la del cuadrado construido sobre la hipotenusa.*

COMENTARIO

Es muy importante que el profesor o profesora valide las conclusiones de los alumnos y alumnas. Este es un momento adecuado para introducir formalmente el Teorema de Pitágoras y alguna demostración simple. Es importante también que comprendan la diferencia entre las conjeturas que han hecho a partir de las actividades y una conclusión general (en este caso, formulada en el Teorema de Pitágoras).

Se sugiere proponerles investigar sobre Pitágoras (sobre los pitagóricos y todo lo que involucraba pertenecer a ese grupo, etc.), la época histórica a la que se remonta el teorema. Se puede estudiar la posibilidad de hacer un trabajo conjunto con el subsector Estudio y Comprensión de la Sociedad.

Algunos sitios en internet que pueden resultar interesantes son: Biografía de Pitágoras (y otros) y teorema: **http://www.mat.usach.cl/histmat/html/iaf.html** y Matemáticos y su historia (A.C, D.C): **http://www.mat.usach.cl/histmat/html/indice.html**

Para complementar la actividad, se puede hacer un trabajo con representaciones gráficas utilizando un programa computacional adecuado como, por ejemplo, el Cabri Geométrico II. Previamente al trabajo con cuadrados se puede trabajar con otros polígonos regulares (como los de la actividad anterior) con el fin de hacer algunas comprobaciones numéricas de la relación entre las áreas. En esos casos, el cálculo de las áreas se hace subdividiendo los polígonos (un pentágono, por ejemplo) en varios triángulos congruentes. Es muy importante entregar las medidas de las alturas que se utilizarán para facilitar los cálculos.

Actividad 8

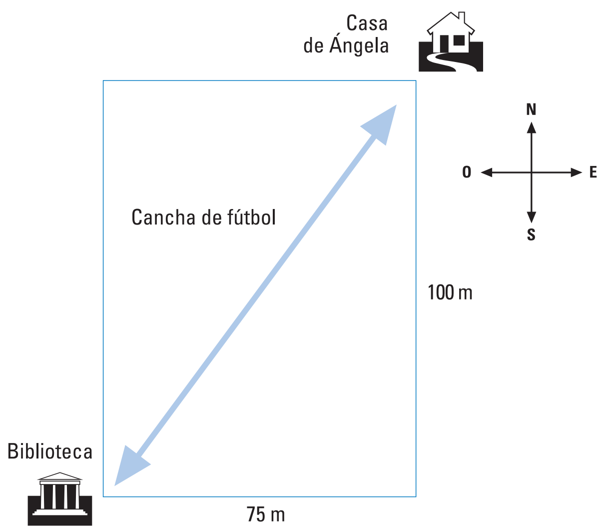
Utilizan el Teorema de Pitágoras para la resolución de problemas de cálculo de distancias.

Ejemplos

1. *Usualmente Angela va de su casa a la biblioteca pública, caminando por la vereda 100 metros al sur y 75 metros al oeste. Ella prefiere este camino porque está iluminado y le permite mirar las plantas de las jardineras ubicadas al lado del parque. Pero en esta oportunidad va muy apurada de regreso a su casa y decide tomar un atajo cruzando la cancha de fútbol tal como indica el dibujo.*

a) ¿Cuántos metros camina Angela por el atajo, aproximadamente?

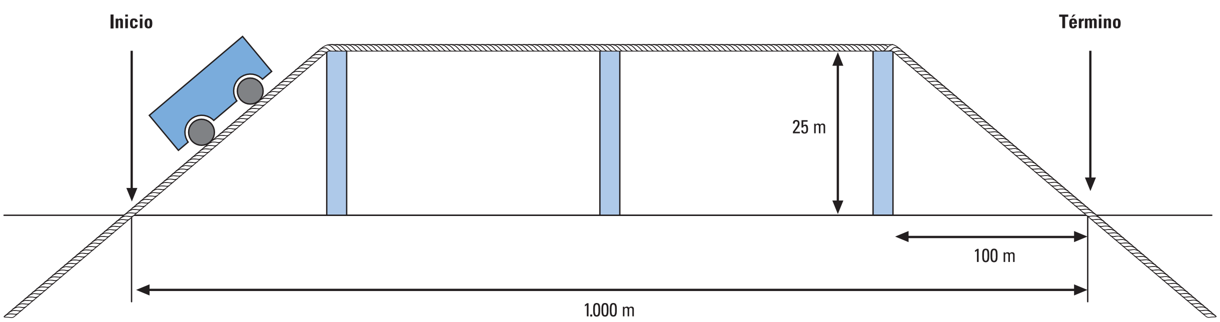
b) ¿Aproximadamente, cuánto más corto es el recorrido del atajo comparado con el camino habitual que realiza Angela?



COMENTARIO

Para encontrar los resultados aproximados pueden utilizar una calculadora de bolsillo. Lo importante es que las alumnas y alumnos encuentren una manera de resolver el problema apoyándose en el Teorema de Pitágoras.

2. *En un parque se ha instalado un nuevo andarivel, de modo que los visitantes puedan observar el paisaje desde la altura El punto inicial y final del andarivel están a una distancia de 1.000 metros. Los carros transitan por un cable de acero que se levanta diagonalmente desde el suelo hasta lograr una altura de 25 metros, para luego seguir avanzando hasta que, en determinado punto, vuelven a bajar, tal como se ve en el dibujo.*



- ¿Cuántos metros recorre cada carro al deslizarse sobre el andarivel?

COMENTARIO

Para encontrar los resultados aproximados pueden utilizar una calculadora de bolsillo o simplemente acotar. En este último caso, los alumnos y alumnas ya han calculado $100^2 = 10.000$, por lo que es fácil darse cuenta que un número al cuadrado que dé como potencia 10.625 es cercano a 100. Luego, al probar con la calculadora con 101, 102,103, 104, se puede concluir que el número más cercano, utilizando una aproximación, es 103.

3. *Dos personas se encuentran en una intersección de calles. Luego de conversar, una se dirige hacia el Norte y la otra hacia el Este, caminando por senderos perpendiculares. La primera es de paso regular y avanza 48 metros en un minuto; mientras que la persona más lenta lo hace a 36 metros por minuto.*

- Representan la situación y confeccionan una tabla que indique la distancia a la cual se encuentren ambas personas del punto de encuentro inicial y la distancia entre ellas, **en línea recta,** cuando han pasado 1, 2, 3, y más minutos.
- Analizan la tabla completa, buscan un patrón entre los números y una manera de expresar en forma general las distintas distancias.

COMENTARIO

Al confeccionar la tabla es importante que se estructure en torno al tiempo, pues ayudará a establecer la forma de expresar las distancias en forma general. Por ejemplo:

Minutos	Distancia recorrida hacia el Norte (en metros)	Distancia recorrida hacia el Este (en metros)	Distancia en línea recta entre las personas
1			
2			
3			
10			
30			

Es interesante reflexionar sobre los tríos de números que se generan en la tabla y relacionar con los números pitagóricos. Al analizar la tabla es importante concluir que los tríos de números se generan a partir de múltiplos de 36, 48 y 60 y, por tanto, de 3, 4 y 5. Por ejemplo: a los 2 minutos, las distancias son:

$(36 \text{ x } 2)^2 + (48 \text{ x } 2)^2 = (60 \text{ x } 2)^2$

$(72)^2 + (96)^2 = (120)^2$

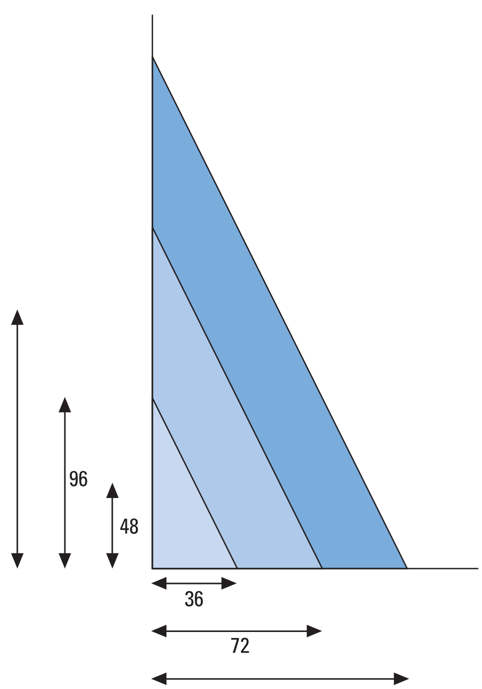
y a los 30 minutos las distancias son:

$(36 \text{ x } 30)^2 + (48 \text{ x } 30)^2 = (60 \text{ x } 30)^2$

$(1.080)^2 + (1.440)^2 = (1.800)^2$

También es de interés concluir que el valor que representa la distancia en línea recta debe ser siempre mayor que la suma de las otras hacia el norte y el este.

Se puede apoyar el proceso de razonamiento sistemático con un dibujo como el siguiente:



Actividad 9

Investigan sobre aplicaciones del Teorema de Pitágoras en situaciones cotidianas como, por ejemplo, la verificación de ángulos rectos. Establecen conclusiones respecto de los números pitagóricos.

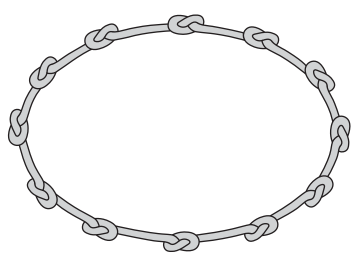
Ejemplos

1. **Trabajando en grupos, leen la siguiente situación, responden a las interrogantes y luego comparten con su curso las soluciones.**

En el antiguo Egipto, el río Nilo subía su nivel, desbordándose cada año, inundando las tierras vecinas y destruyendo los límites de las propiedades. Como resultado, los egipcios debían medir sus tierras todos los años. Como la mayoría de los terrenos eran rectangulares, necesitaban una manera confiable de marcar los ángulos rectos.

Ellos desarrollaron un ingenioso método que incluía una cuerda con nudos entre los cuales existía igual distancia.

- Los egipcios tomaban una cuerda y marcaban 12 segmentos que tuvieran la misma longitud. Unían los extremos de la cuerda de manera de formar un lazo cerrado en el cual la distancia marcada entre cada segmento fuera igual, como se muestra en el dibujo:



¿Cómo creen que usaban la cuerda los egipcios?

- Construyen una cuerda similar y experimenten con ella para construir ángulos rectos.

COMENTARIO

Para asegurar que la longitud de cada lado de los triángulos sea un número natural, las cuerdas usadas por cada grupo deben tener 12 marcas o un número múltiplo de 12.

Es necesario orientar a los niños y niñas para que intenten construir triángulos rectángulos diferentes y se den cuenta de que la solución está dada por un triángulo rectángulo de lados 3; 4; 5.

La actividad se puede ampliar al uso de cuerdas con una cantidad de marcas que sea múltiplo de 12. Lo importante es utilizar números naturales **a, b** y **c** que cumplan con la igualdad $a^2 + b^2 = c^2$.

2. **Leen y comentan la siguiente situación.**

    Un grupo de estudiantes de la escuela quieren hacer un trazado en el suelo de un sector del patio para construir allí una cancha de multiuso. Para ello consiguieron lienzas largas y estacas. La cancha debe ser rectangular y medir 50 metros por 30 metros.
    Discuten un método para confirmar que lo ángulos del trazado queden rectos que consiste en utilizar tres trozos de cordel con el cual se determina un triángulo rectángulo. Uno de los niños dice "pero quedamos donde mismo porque, ¿cómo nos aseguraremos de que el triángulo es rectángulo?."

- Discuten la situación y escriben un procedimiento pertinente para resolver el problema.

COMENTARIO

Aquí se trata esencialmente de utilizar de manera pertinente una aplicación del Teorema de Pitágoras. Se determina una distancia razonable (por ejemplo, 3) para un lado de la futura cancha; se ubica un cordel de 4 metros por el otro y se fuerza la diagonal del triángulo para que alcance 5 metros. Posteriormente se prolongan los lados, con la ayuda de las lienzas. Se repite el procedimiento en las otras tres esquinas. Se puede utilizar cualquier trío de números pitagóricos adecuados para las distancias involucradas (6 - 8 - 10; 12 - 16 y 20; por ejemplo).

3. **Resuelven en forma individual la siguiente situación.**

    Si deseas construir una mesa de cuatro patas:
    ¿Qué procedimientos se te ocurren que puedes usar para asegurar que las patas están en ángulo recto respecto a la cubierta y perpendiculares respecto del suelo?
    ¿Qué pasaría si las patas no estuvieran en ángulo recto respecto a la cubierta, es decir, si su base no está en ángulo recto con la altura de ellas? Comprueba tu aseveración.
    ¿En qué otro tipo de construcciones se podría requerir de verificaciones de este tipo?

- Investigan con un constructor y un maestro carpintero cómo comprueban la presencia de ángulos rectos y cómo los construyen.

COMENTARIO

Es importante que los alumnos y las alumnas comprendan bien la situación planteada. Para ello el profesor o profesora puede apoyarse en dibujos. En este caso, dibujar primero un modelo de la pata de la mesa, de modo que cumpla con las condiciones (ser un paralelepípedo recto para quedar vertical y formar ángulo recto con la cubierta de la mesa).

Actividades de evaluación

A continuación se proponen algunas actividades y problemas para la evaluación de los aprendizajes esperados de la unidad y que pueden ser incorporadas en su plan de evaluación. Algunas de las actividades están diseñadas para ser trabajadas en grupo.

En la columna de la derecha se especifican algunos indicadores que orientan las observaciones del logro de los aprendizajes.

Ejemplos de actividades y problemas	Indicadores / Observar que:
Analizan la veracidad de diferentes afirmaciones relativas a potencias de exponente 2 y 3. Exponen argumentos justificando sus conclusiones. Ejemplo Distribuidos en grupos investigan preguntas respecto de las potencias de exponente 2 y de exponente 3, como las que se entregan a continuación: • ¿El valor de 2 al cubo es igual que el valor de tres al cuadrado? • El valor de $5^2 + 3^2$, ¿es igual que 8^2? • El valor de $4^2 - 2^2$, ¿es igual que 2^1? • El valor de 5^3, ¿es igual que $5 + 5 + 5$? • El valor de 4^2, ¿es igual que $4 \cdot 2$? • 2^3, ¿Es igual a 8? • El valor de $3^2 + 1^3$, ¿es igual a 10?	• Justifican sus respuestas a partir de propiedades generales de las potencias o desarrollando numéricamente cada caso particular.
Resuelven problemas que impliquen verificar ángulos rectos y/o determinar longitudes. Ejemplo Un carpintero está diseñando el catálogo con diferentes tipos de puertas que pondrá a la venta. Debe decidir las medidas de ancho y alto de cada una de manera que se vean armoniosas y sean útiles para los fines que son pensadas.	

- ¿Cuáles son las medidas posibles que tú le puedes sugerir para, al menos, 3 puertas?

Luego debe dar la instrucción a su maestra ayudante para verificar que las puertas de esas medidas no queden descuadradas. El procedimiento que el carpintero le enseña a la maestra no incluye el uso de la escuadra.

- ¿Cuál puede ser ese procedimiento?

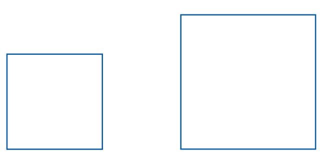
  Muéstralo con ejemplos.

  Para encontrar las respuestas puedes usar la calculadora.

Utilizan el Teorema de Pitágoras para resolver problemas geométricos y numéricos.

Ejemplos

1. Construye un cuadrado que tenga por área la suma de las áreas de los dos cuadrados de la figura.



Justifica el procedimiento utilizado.

2. María necesita marcar en el patio una superficie perfectamente rectangular de 40 por 50 metros para instalar en ella un terreno de juegos.

a) Indícale un procedimiento posible para asegurar que el terreno resulte rectangular.

b) Determina, al menos, tres tríos de medidas que permitirían marcar los ángulos rectos en su diseño.

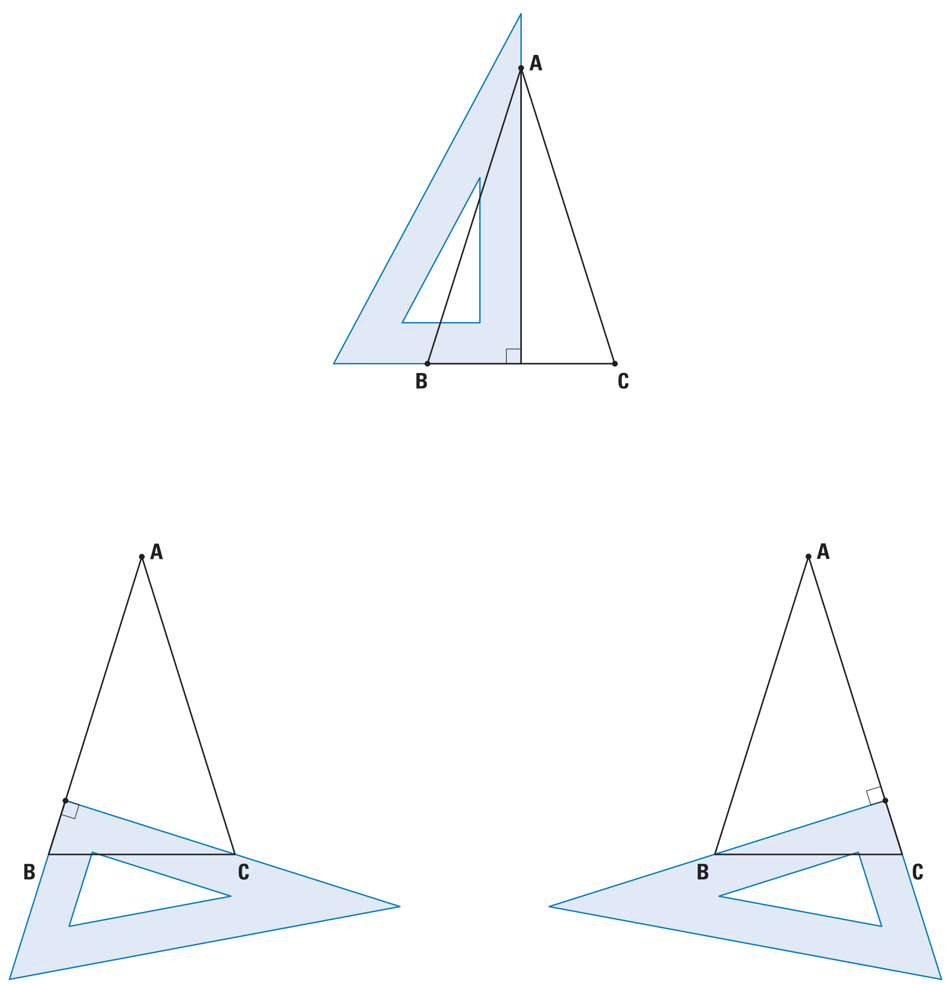
- En las tres posibilidades sugieren dimensiones razonables para el uso que se le dará (puerta de entrada, portón, puerta de acceso a habitaciones de casa, puertas de muebles, puertas de salones grandes, etc.)
- Relacionan la “cuadratura” de la puerta con los ángulos rectos en sus esquinas.
- El procedimiento incluye alguna relación con el Teorema de Pitágoras.
- Recurren a la construcción de un triángulo rectángulo cuyos catetos son iguales a la longitud de cada uno de los cuadrados.
- Reconocen el procedimiento como una aplicación del Teorema de Pitágoras.
- Asocian el problema con el diseño de ángulos rectos.
- Determinan tríos de números pitagóricos adecuados al problema (consideran las dimensiones del terreno).

Anexo 1

Construcción de alturas y bisectrices (Unidad 2)

1. Alturas

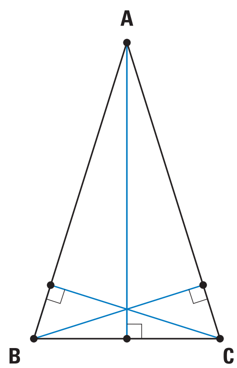
Dibujo con escuadra



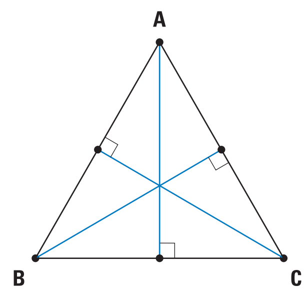
Ubicar el ángulo recto de la escuadra sobre el lado desde el cual se va a trazar la altura; hacer pasar el borde por el vértice correspondiente y trazar.

Alturas en diferentes tipos de triángulo

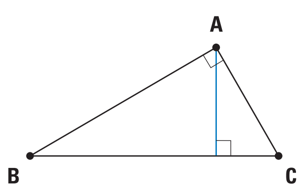
Isósceles



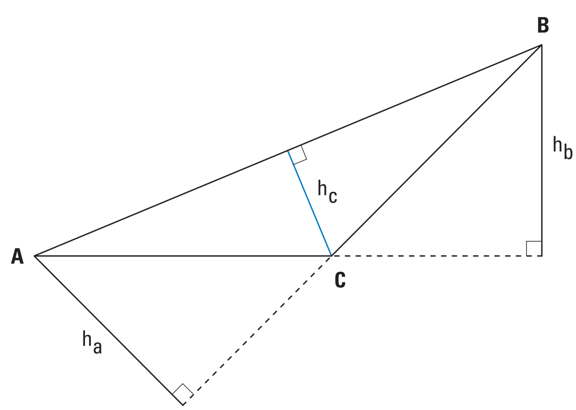
Equilátero



Rectángulo



Escaleno



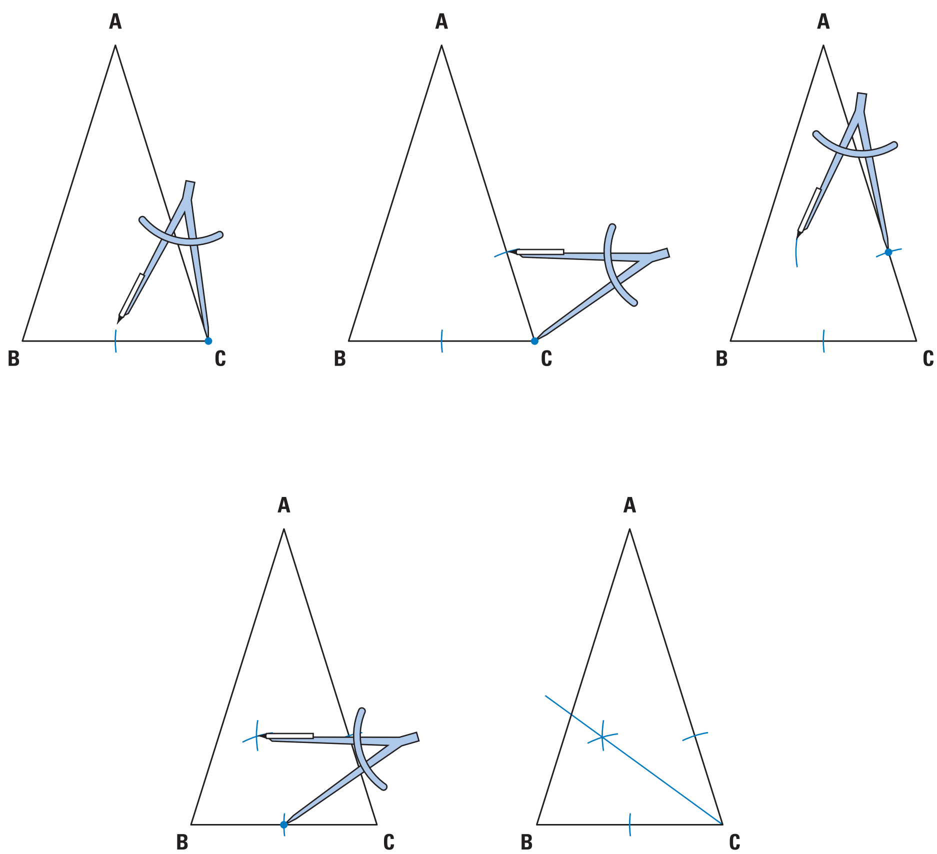
2. Bisectrices

Trazar bisectrices con compás y regla

Bisectriz del ángulo ACB:

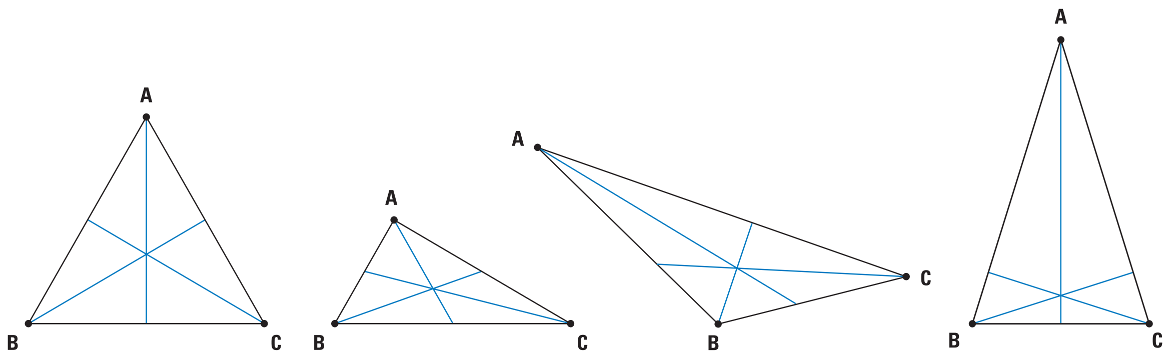
Ubicar el compás en el vértice C. Marcar un punto en el lado AC, y luego, conservando la distancia, marcar un punto en BC.

Ubicar el compás en estos puntos sucesivamente, y marcar un punto exterior. Unir el vértice C con dicho punto.



Bisectrices en los distintos tipos de triángulos

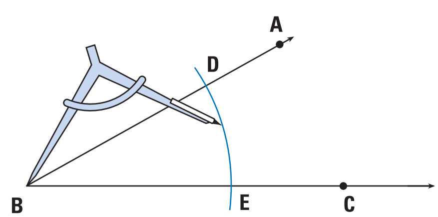
Equilátero Rectángulo Escaleno Isósceles



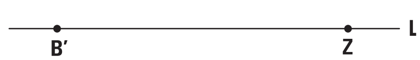
3. Copiar ángulo y trazos

Para construir un ángulo igual a otro dado ABC, procede en la forma siguiente:

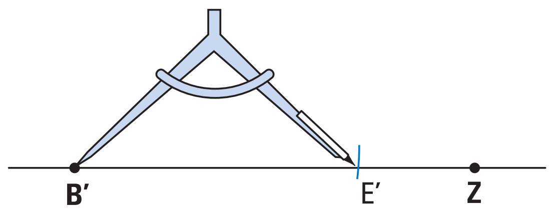
1. Aplica en B el compás con una abertura cualquiera, describiendo un arco que intersecte los lados del ángulo ABC en D y E.



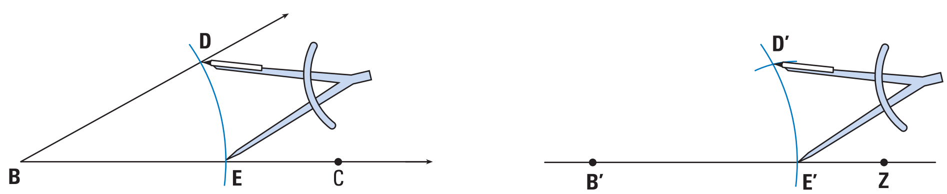
2. Dibuja un rayo $\overrightarrow{B'Z}$ sobre una recta cualquiera L.



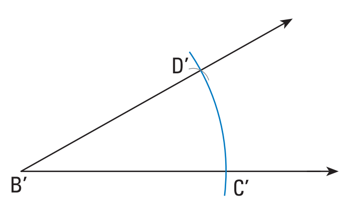
3. Con centro en B' dibuja un arco de circunferencia con abertura del compás $\overline{BE}$, determinando E' en $\overrightarrow{B'Z}$.



4. Luego, con el compás, toma la distancia que hay entre D y E (del ángulo original). Luego con el centro E' y abertura del compás determinas D'.



5. Finalmente, unes B' con D' más allá de D', obteniendo el ángulo D'B'E' de igual medida que el ángulo dado ABC.



Triángulos

Es un polígono de 3 lados, 3 vértices y 3 ángulos interiores.
El símbolo que lo representa es Δ

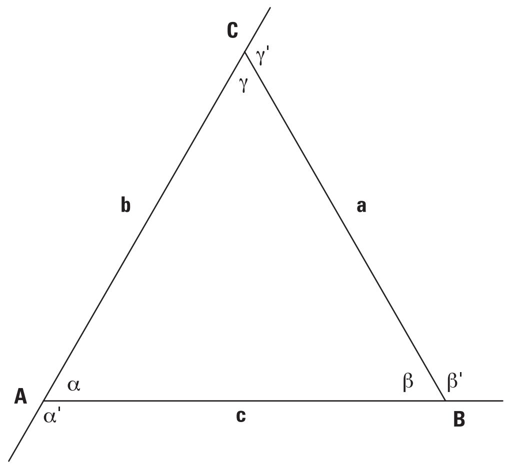
Elementos primarios

Vértices: A,B y C

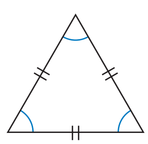
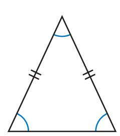
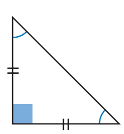
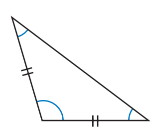
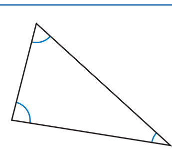
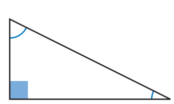
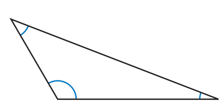
Lados: $\overline{AB} = c$; $\overline{BC} = a$; $\overline{AC} = b$

Ángulos interiores: α, β y γ

Ángulos exteriores: α', β' y γ'



Clasificación

Ángulos / Lados	Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo
Equilátero		**no hay**	**no hay**
Isósceles			
Escaleno			

3. Construcción de triángulos

Para la construcción geométrica de un Δ cualquiera son suficientes 3 datos:

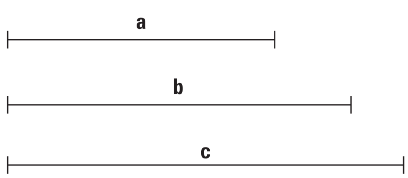
- sus 3 lados (LLL);
- dos lados y el ángulo comprendido entre ellos (LAL);
- un lado y los 2 ángulos adyacentes a él (ALA);
- dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos (LLA).

Realicemos la construcción geométrica de estos cuatro casos.

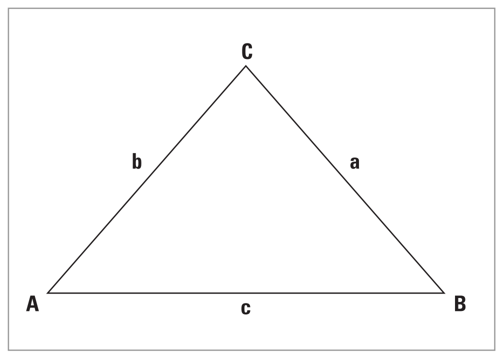
Caso 1

(LLL)

Dados los lados a, b, c construye el triángulo

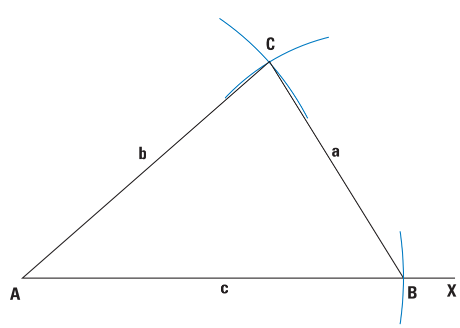


Modelo



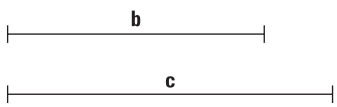
Construcción

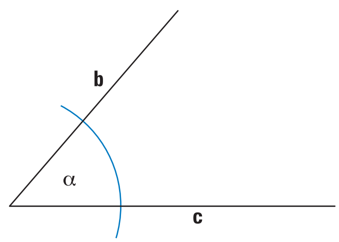
1. Dibuja un rayo $\overline{AX}$
2. En $\overline{AX}$ copia c y obtienes el punto B
3. Con centro en A y distancia b, dibuja un arco
4. Con centro en B y distancia a, corta el arco anterior y obtienes el punto C
5. Une A con C, B con C y obtienes el D pedido



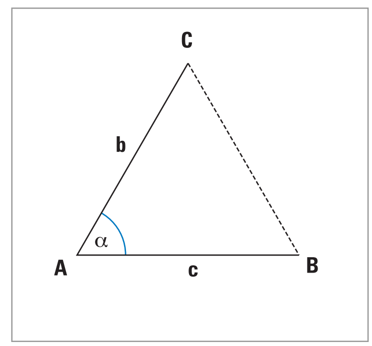
Caso 2
(LAL)

Dados 2 lados b y c y el ángulo a comprendido entre ellos construye el triángulo



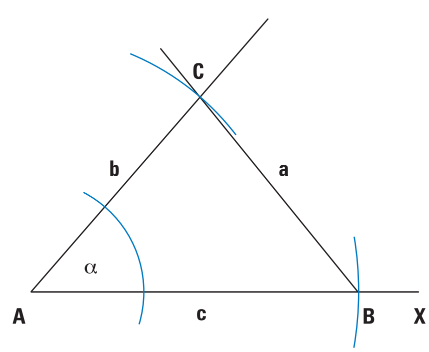


Modelo



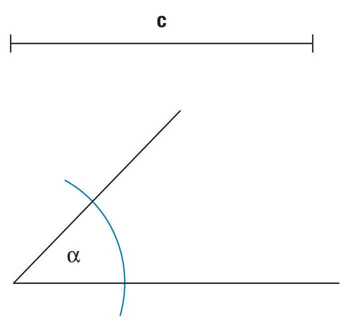
Construcción

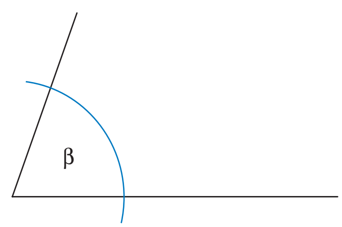
1. Dibuja un rayo $\overrightarrow{AX}$
2. En $\overrightarrow{AX}$ copia c y obtienes el punto B
3. En el punto A copia el ángulo a
4. En el lado distinto de c, del ángulo a, copia la distancia b y obtienes el punto C
5. Une B con C y obtienes el D pedido



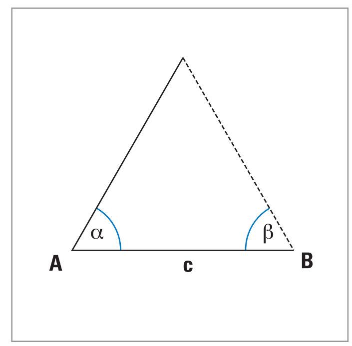
Caso 3
(ALA)

Dados el lado c y los 2 ángulos adyacentes a él α y β construye el triángulo.



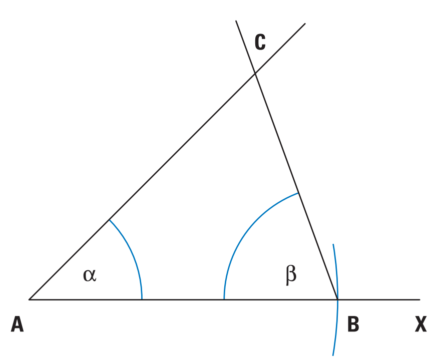


Modelo



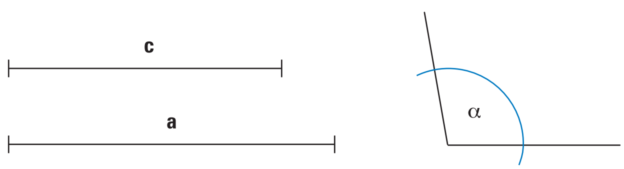
Construcción

1. Dibuja un rayo $\overrightarrow{AX}$
2. En $\overrightarrow{AX}$ copia c y obtienes el punto B
3. En el punto A copia el ángulo α
4. En el punto B copia el ángulo β
5. El punto C lo obtienes en la intersección de los lados del ángulo a y del ángulo b: completa el pedido

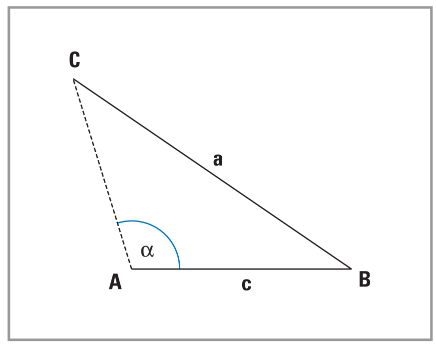


Caso 4
(LLA)

Dados 2 lados a y c y el ángulo opuesto mayor de ellos, construye el triángulo.

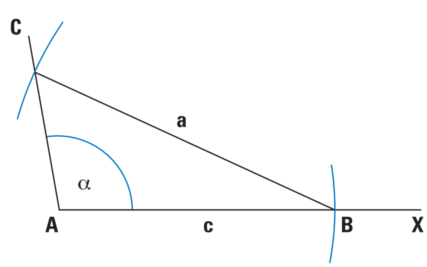


Modelo



Construcción

1. Dibuja un rayo $\overrightarrow{AX}$
2. En $\overrightarrow{AX}$ copia c y obtienes el punto B
3. En A copia en ángulo α
4. Con centro en B y distancia a, corta el lado del ángulo a distinto de c y obtienes el punto C
5. Une C con B y obtienes el triángulo pedido

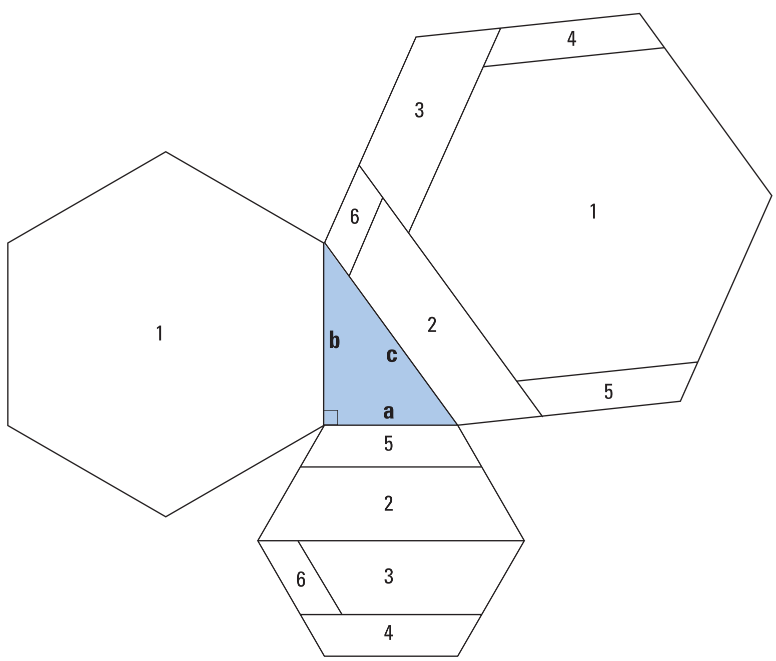


Anexo 2

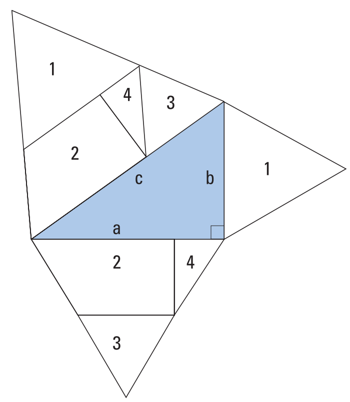
Soluciones de los rompecabezas (Unidad 5)

A continuación se presentan algunas soluciones para comprobar la posibilidad de cubrir el área de un polígono regular construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo con los dos más pequeños. Estas soluciones no son únicas.

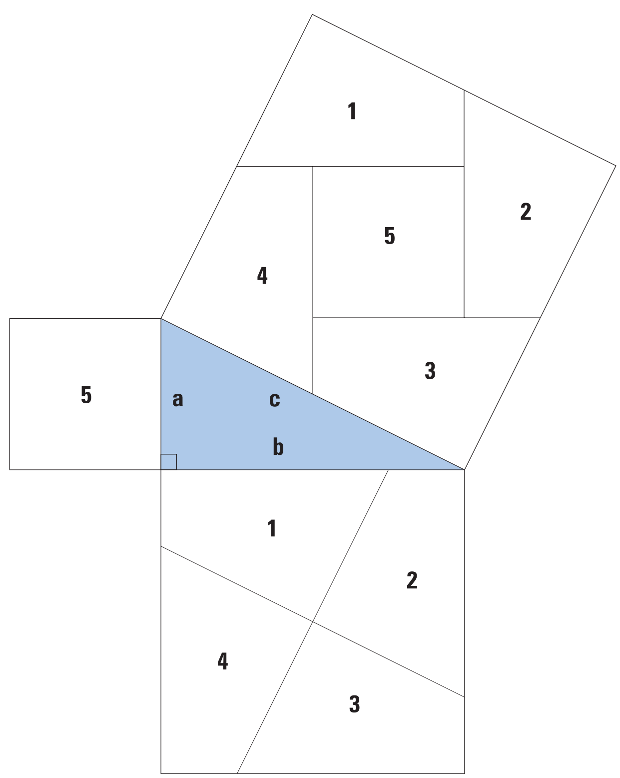
Hexágonos regulares



Triángulos equiláteros



Cuadrados



Bibliografía

Alsina, Burgués, Fortuny, Giménez y Torra (1996). *Enseñar matemáticas*, GRAO, Madrid.

Centeno, Julia (1997). *Números decimales ¿Por qué? ¿Para qué?* Serie Matemáticas: cultura y aprendizaje. Editorial Síntesis.

Corbalán, Fernando (1995). *La matemática aplicada a la vida cotidiana*, GRAO, Madrid.

Dickson, L., Brown M., y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Editorial Labor S.A, Barcelona.

Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática (1991). NCTM, USA (edición en castellano).

Gálvez, G., Navarro, S., Riveros, M. y Zanocco, P. (1994). *Aprendiendo matemáticas con calculadora*. Ministerio de Educación, Santiago de Chile.

Gardner, Martin (1994). *Matemáticas para divertirse*, Zugarto, España. Colección.

Groupe d'Enseignement Mathématique (1996). *Mathématiques 3: De question en question*, Didier Hatier, Bélgica. (*)

Holt, Michael (1987). *Matemáticas recreativas 2*. Ediciones Martínez Roca, Barcelona.

Instituto Nacional de Estadísticas, INE (1999). *Estadísticas de Chile en el siglo XX*, Santiago.

Kamii, Constance (1989). *Reinventando la aritmética II*. Ed. Visor Distribuciones, Madrid.

Lappan, Glenda, Fey, James T., Fitgerald, William M., Friel, Susan N. y Difanis Phillips, Elizabeth (1998). *Looking for Pythagoras,The Pythagorean Theorem, Teacher's Edition*. Dale Seymour Publications. Serie: Connected Mathematics Geometry, Michigan. (*)

Malila C. Ghyka (1968). *El número de oro. tomo I: Los ritmos; tomo II Los ritos*. Editorial Poseidón, Buenos Aires.

Malila C. Ghyka (1968). *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*. Editorial Poseidón, Buenos Aires.

Morris, Kline (1984). *El fracaso de las matemáticas modernas: ¿por qué Juanito no sabe sumar?*, Siglo XXI, Madrid.

Perelman, Y. (1987). *Matemáticas recreativas*. Ediciones Martínez Roca, Barcelona.

Riveros, M. y Zanocco Pierina (1992). *Geometría: aprendizaje y juego*. Ed. Universidad Católica de Chile.

Riveros, Marta y Zanocco Pierina (1998). *Matemática un juego de niños*. Teleduc. Editorial Universidad Católica de Chile. Este libro contiene un capítulo dedicado al rectángulo de oro.

Rouche, Nicolas (1998). *Pourquoi ont-ils inventé les fractions?* De. Ellipses. París. (*)

Severo, J. y G. Ferrari (1994). *Olimpiadas matemáticas*, Ñandu, Buenos Aires.

(*) Aunque estos libros no están en castellano son de muy fácil lectura. Se recomiendan porque proponen una gran variedad de situaciones interesantes.

Sitios Internet específicos

(Es posible que algunas direcciones hayan dejado de existir o se modifiquen después de la publicación de este programa).

Areas y volúmenes: recurso didáctico para la enseñanza de la geometría, que permite conocer las diversas figuras geométricas, sus características principales clasificación, tipos, puede ser utilizada para reforzar los conceptos de Figuras Planas y cuerpos por volúmenes, además es complementado con Guías de trabajo para los alumnos de acuerdo a los contenidos presentados.
http://www.arrakis.es/~bbo/geom/

http://roble.pntic.mec.es/~jcamara/websup1.htm

Página interactiva que contiene diez problemas relacionados con geometría, operatoria, combinatoria e ingenio. Para cada uno de ellos ofrece una ventana o campo de texto en el cual escribir la respuesta para posteriormente enviarla.
http://www.nalejandria.com/forms/matemas.htm

Cabri Geometre, disponible en el sitio Web:
http://www-cabri.imag.fr
Software muy completo que permite aprender geometría en forma interactiva. Permite trabajar, entre otros, los conceptos de simetría, área de un triángulo, ampliación y reducción de figuras geométricas para visualizar que ocurre con su área y perímetro, construcción de alturas y bisectrices en diversos tipos de triángulos, etc.

Ejercicios y problemas de proporcionalidad para ser desarrollado por los alumnos y alumnas:
http://www.ince.mec.es/timss/propor.htm

Sitios que permiten acceder tanto a otras páginas orientadas tanto al alumnado como a las profesoras y profesores como a bases de informaciones susceptibles de ser utilizadas para la creación de situaciones problemas:

Manuel de Armas Cruz. Matemáticas:
http://nti.educa.rcanaria.es/usr/matematicas

El Raco del Clic:
http://www.xtec.es/recursos/clic

El Paraíso de las Matemáticas:
http://members.xoom.com/pmatematicas

Instituto Nacional de Estadística:
http://www.ine.cl/

Dirección Meteorológica de Chile:
http://www.meteochile.cl

Departamento de Geofísica (DGF) de la Universidad de Chile. Boletín Climático
http://met.dgf.uchile.cl/clima

Sociedad de Matemática de Chile:
http://www.fermat.usach.cl/~somachi
http://fermat.usach.cl/~somachi/

Sociedad Americana de Matemática:
http://e-math.ams.org

Real Sociedad Matemática Española:
http://rsme.uned.es

University of Minnesota. The Geometry Centre:
http://www.geom.umn.edu

Software educativo

Mates Blaster 2: el secreto de la ciudad perdida. Este software ha sido diseñado para el desarrollo y aplicación del cálculo básico en los alumnos de segundo ciclo de Educación Básica. Con el uso de operaciones, números enteros, fracciones y decimales, porcentajes. Estos conocimientos se introducen a través de historias divertidas, juegos y múltiples aplicaciones multimediales.

Razonamiento y deducciones 3: Software que ayuda a los niños a desarrollar su capacidad para resolver problemas, desarrollar destrezas y habilidades como: creatividad, razonamiento crítico y memoria.

Software de Productividad: Las Planillas electrónicas son un buen aporte diseñadas especialmente para el tratamiento de información como lo menciona el programa porque permite ingresar datos en tablas que pueden ordenarse de acuerdo a diferentes criterios, utilizar un variedad de funciones entre ellas de Estadísticas para determinar: promedios, media, moda, mediana. Además permite el análisis estadístico de los datos e incorporar los gráficos de acuerdo a la información que se esté trabajando. También es útil para comprobar predicciones.

Más que desarrollar el trabajo intentando que conozcan de memoria o mecánicamente algunas expresiones equivalentes, se podría utilizar la planilla de cálculo para mostrar como una fracción se transforma en un decimal y luego expresar este como porcentaje. Esto le permitiría encontrar razones de equivalencia entre expresiones fraccionarias, decimales y porcentajes.

Juega con las Matemáticas: Desde una máquina del tiempo el usuario viaja a antiguas civilizaciones donde debe resolver problemas aritméticos para desarrollar los hábitos del cálculo numérico, trabajar con formas geométricas y aprender a medir y ordenar.

E-Lab: Software que permite utilizar el razonamiento proporcional como estrategia para resolver proposiciones numéricas y situaciones problemáticas; reconocer diferencias fundamentales entre sistemas de numeración y sus operatorias, analizar y utilizar cálculos matemáticas.

Objetivos Fundamentales y

Contenidos Mínimos Obligatorios

Quinto a Octavo Año Básico

Educación Matemática

Objetivos Fundamentales

5º

Quinto Año Básico

NB3

- Procesar información cuantitativa, expresada con números de más de 6 cifras.
- Programar y administrar el uso del tiempo personal.
- Resolver problemas de diversos tipos, referidos a situaciones multiplicativas.
- Seleccionar una forma de cálculo –oral, escrito o con calculadora– a partir de las relaciones entre los números y las exigencias del problema a resolver.
- Aplicar el cálculo aproximado en la evaluación de situaciones y el control de resultados.
- Reconocer la multiplicidad de formas que puede asumir un valor fraccionario.
- Utilizar planos para orientarse en el espacio físico.
- Distinguir elementos de un cuerpo geométrico y establecer correspondencias entre un cuerpo y su representación plana.
- Reconocer elementos en una figura geométrica y analizar los cambios que se producen en la figura al variar la medida de sus ángulos internos.
- Distinguir perímetro y área como elementos uni y bidimensionales en una figura geométrica.
- Percibir la significación de las fórmulas, en tanto medio para expresar relaciones entre magnitudes variables.

6º

Sexto Año Básico

NB4

- Establecer nexos entre las operaciones básicas en los números naturales y reconocer la posibilidad de sustituir unas por otras.
- Conocer prácticas del mundo adulto en las que intervienen números y cálculos y confiar en la propia capacidad para incorporarlas en la resolución de problemas.
- Fundamentar procedimientos de cálculo –orales, escritos y con calculadora– basados en regularidades de los números y en propiedades de las operaciones.
- Resolver problemas que involucren unidades de medida de peso, capacidad y longitud, utilizando las equivalencias entre unidades, expresando los resultados de manera adecuada a la situación.
- Operar con cantidades no enteras utilizando, de acuerdo a la situación, números decimales o fracciones.
- Planificar el trazado de figuras sobre la base del análisis de sus propiedades, utilizando los instrumentos pertinentes.
- Comprender los efectos que provoca en el perímetro o el área de cuadrados y rectángulos la variación de la medida de sus lados y recurrir a las razones para expresarlas.
- Recolectar y analizar datos en situaciones del entorno local, regional y nacional, y comunicar resultados.

7º

Séptimo Año Básico

NB5

- Reconocer diferencias fundamentales entre el sistema de numeración y medición decimal y otros sistemas de numeración y medición.
- Apreciar el valor instrumental de las matemáticas en la apropiación significativa de la realidad.
- Atribuir y expresar el significado de grandes y pequeños números utilizando diferentes recursos tanto gráficos como numéricos.
- Anticipar resultados –aproximando y/o acotando– a partir del análisis de las características de los números involucrados en los problemas y de las condiciones de éstos.
- Utilizar el razonamiento proporcional como estrategia para resolver problemas numéricos y geométricos.
- Analizar familias de figuras geométricas para apreciar regularidades y simetrías y establecer criterios de clasificación.
- Recolectar y analizar datos en situaciones del entorno local, regional y nacional y comunicar resultados; seleccionar formas de presentar la información y resultados de acuerdo a la situación.

8º

Octavo Año Básico

NB6

- Utilizar sistemáticamente razonamientos ordenados y comunicables para la resolución de problemas numéricos y geométricos.
- Percibir las posibilidades que ofrece el sistema de numeración decimal para expresar cantidades cualesquiera, por grandes o pequeñas que éstas sean.
- Resolver problemas utilizando las potencias para expresar y operar con grandes y pequeñas cantidades.
- Reconocer que una amplia gama de problemas se pueden expresar, plantear y resolver utilizando expresiones algebraicas simples.
- Estimar y acotar, de manera pertinente y razonable, resultados de operaciones con decimales positivos y negativos; expresarlos en fracciones según posibilidades y conveniencia de acuerdo a la situación.
- Recolectar y analizar datos en situaciones del entorno local, regional y nacional y comunicar resultados, utilizando y fundamentando diversas formas de presentar la información y los resultados del análisis de acuerdo a la situación.
- Analizar y anticipar los efectos en la forma, el perímetro, el área y el volumen de figuras y cuerpos geométricos al introducir variaciones en alguno(s) de sus elementos (lados, ángulos).
- Reconocer las dificultades propias de la medición de curvas y utilizar modelos geométricos para el cálculo de medidas.

Contenidos Mínimos Obligatorios

5º

Quinto Año Básico
NB3

Números naturales

Hasta 1.000:

- descomponer números en forma multiplicativa identificando sus factores;
- identificar múltiplos de un número;
- interpretar los factores de un número como sus divisores;
- descomponer números en sus factores primos.

Extensión a la clase de los millones:

- leer, escribir y ordenar números.

En la vida diaria:

- utilizar el calendario para determinar fechas y calcular duraciones, estableciendo equivalencias entre días, semanas, meses y años;
- leer y escribir números utilizando como referente unitario los miles, los millones o los miles de millones.

Multiplicación y división

Determinar resultados en situaciones correspondientes a otros significados (relación proporcional más compleja, comparar...).

Cálculo oral

Redondear números, como estrategia para el cálculo aproximado de sumas, restas, productos y cuocientes.

6º

Sexto Año Básico
NB4

Números en la vida diaria

Resolución de problemas, utilizando la calculadora, que impliquen:

- monedas de otros países, valores de cambio y sus equivalencias;
- uso de documentos y formularios bancarios y comerciales.

Nexos entre las operaciones aritméticas

Desarrollo de razonamientos que conduzcan a reemplazar un procedimiento operatorio por otro equivalente, apoyándose en el carácter inverso de la sustracción respecto de la adición, el carácter inverso de la división respecto de la multiplicación, la interpretación de la multiplicación como adición iterada y la interpretación de la división como sustracción iterada.

Divisibilidad

Aplicación de criterios de divisibilidad (por 2, 3, 5, 9 y 10).

Multiplicación y división de fracciones en situaciones habituales

Análisis de las relaciones entre factores y productos y entre los términos de una división y el cuociente en diferentes casos, cuando intervienen cantidades menores que 1.

7º

Séptimo Año Básico
NB5

Números en la vida diaria

- Interpretación y expresión de resultados de medidas, grandes y pequeñas, apoyándose en magnitudes diferentes (una décima de segundo en la cantidad de metros que avanza un atleta en ese tiempo; grandes cantidades de dinero en UF, por ejemplo).

Sistema de numeración decimal

- Comparación de la escritura de los números en el sistema decimal con la de otros sistemas de numeración en cuanto al valor posicional y a la base (por ejemplo, egipcio, romano, maya).
- Comparación de la escritura de números, hasta 100, en base diez y en base dos (sistema binario).

Potencias de base natural y exponente natural

- Interpretación de potencias de exponentes 2 y 3 como multiplicación iterada.
- Asociación de las potencias de exponente 2 y 3 con representaciones en 2 y 3 dimensiones respectivamente (áreas y volúmenes).
- Investigación de algunas regularidades y propiedades de las potencias de exponente 2 y 3.

Multiplicación y división de números decimales

- Cálculo escrito, mental aproximado y con calculadora en situaciones problemas.
- Análisis de relaciones entre factores y producto y entre los términos de la división y el cuociente para establecer regularidades cuando intervienen cantidades menores que 1.

8º

Octavo Año Básico
NB6

Sistema de numeración decimal

- Asociación de una potencia de base 10 con exponente positivo o negativo a cada posición en el sistema de numeración.
- Interpretación y expresión de resultados como sumas ponderadas de potencias de 10 en situaciones problemas.

Números enteros

- Interpretación del uso de signos en los números, en la vida diaria, en contextos ligados a: la línea cronológica (AC, DC), la medición de temperatura (bajo 0, sobre 0), la posición respecto del nivel del mar.
- Comparación de números enteros con apoyo en la recta numérica.
- Resolución de problemas que impliquen realizar adiciones y sustracciones, con y sin apoyo en la recta numérica.

Ecuaciones de primer grado

- Noción de igualdad de expresiones algebraicas.
- Traducción de situaciones problemas a ecuaciones con una incógnita.
- Creación de diversos problemas con sentido a partir de ecuaciones con una incógnita.
- Uso de propiedades de los números y de las operaciones para encontrar soluciones.

Cálculo escrito

Utilizar algoritmos de cálculo de productos, con factores menores que 100 y de cuocientes y restos, con divisores de una o dos cifras.

Cálculo con apoyo de calculadora

- utilizar calculadora para determinar sumas, restas y productos en la resolución de problemas;
- utilizar calculadora para determinar el cuociente entero y el resto, en divisiones no exactas.

Fracciones

En situaciones correspondientes a diversos significados (partición, reparto, medida...):

- lectura y escritura;
- comparar y establecer equivalencias;
- ubicar una fracción entre dos naturales, utilizando la recta numérica;
- ordenar e intercalar fracciones, con referencia a la recta numérica;
- encontrar familias de fracciones equivalentes;
- adición y sustracción: realizar cálculos, sustituyendo fracciones por otras equivalentes, cuando sea necesario.

Orientación en el espacio

- interpretar planos urbanos y de caminos, utilizando los puntos cardinales como referencia;
- identificar y crear códigos para comunicar diversos tipos de información, al interior de un plano.

Cuerpos geométricos (cubo, prismas y pirámides)

- armar cuerpos, a partir de sus caras;
- construir redes para armar cubos;
- identificar y contar el número de caras, aristas y vértices de un cuerpo y describir sus caras y aristas.

Figuras geométricas

- diferenciar cuadrado, rombo, rectángulo y romboide a partir de modelos hechos con varillas articuladas;

Fracciones y decimales en la vida diaria

- Cálculo del 50% y del 25% como la mitad y la cuarta parte de una cantidad.
- Expresión del 50%, del 25% y del 10% como: $50/100$, $25/100$ y $10/100$; $1/2$, $1/4$ y $1/10$; y 0,5, 0,25 y 0,1, respectivamente.
- Uso de unidades del sistema métrico decimal en situaciones habituales.

Números decimales

- Identificación de las fracciones con denominador 10, 100 y 1000, con los décimos, centésimos y milésimos.
- Transformación de fracciones decimales a números decimales y viceversa, en situaciones de medición.
- Extensión del sistema de numeración a décimos, centésimos y milésimos en situaciones cotidianas y/o informativas que permitan:
  - leer, escribir e interpretar números decimales;
  - establecer equivalencias;
  - ordenar e intercalar decimales;
  - estudiar familias de números decimales, establecer patrones y comparaciones con los números naturales.
- Cálculo de adiciones y sustracciones en contextos situacionales, interpretando resultados, aproximando resultados; estimando antes de calcular; utilizando la calculadora para confirmar resultados estimados.

Figuras y cuerpos geométricos

- Reproducción y creación de figuras y de representaciones planas de cuerpos geométricos, usando regla, compás y escuadra.
- Estudio de cuadriláteros: características de sus lados y de sus ángulos.
- Trazado de cuadriláteros a partir de sus ejes de simetría.
- Combinación de figuras para obtener otras previamente establecidas.

Perímetro y área

- Cálculo de perímetro y área de figuras compuestas por cuadrados, rectángulos y triángulos rectángulos.

Proporcionalidad

- Resolución de situaciones problemas, estableciendo razones entre partes de una colección u objeto y entre una parte y el todo.
- Interpretación y uso de razones expresadas de diferentes maneras.
- Resolución de problemas, elaborando tablas correspondientes a:
  - situaciones de variación no proporcional.
  - situaciones de variación proporcional directa e inversa.
- Identificación y análisis de las diferentes razones y parejas de razones que se pueden establecer entre los datos de tablas correspondientes a variación proporcional directa e inversa.
- Comparación de tablas correspondientes a situaciones de variación proporcional directa e inversa, para establecer diferencias.
- Interpretación y expresión de porcentajes como proporciones, y cálculo de porcentajes en situaciones cotidianas.

Figuras y cuerpos geométricos

- Estudio de triángulos: características de sus lados y de sus ángulos.
- Construcción de alturas y bisectrices en diversos tipos de triángulos.
- Investigación sobre aplicaciones prácticas del teorema de Pitágoras.
- Uso de instrumentos (regla, compás, escuadra), para la reproducción y creación de triángulos y para la investigación de las condiciones necesarias para dibujar un triángulo.
- Redes para armar prismas y pirámides. Armar cuerpos geométricos a partir de otros más pequeños.

Perímetro y área

- Medición y cálculo de perímetros y de áreas de triángulos de diversos tipos en forma concreta, gráfica y numérica.
- Investigación de las relaciones entre medidas de altura y base y el área correspondiente, en familias de triángulos generadas al mantener dichas medidas constantes.

Potencias de base natural y exponente entero

- Análisis y comparación de la representación gráfica de a^2 y de a^{-2}.
- Interpretación de a^{-2} y de a^{-3} como $1/a^2$ y $1/a^3$ respectivamente.
- Potencias como multiplicación iterada.
- Análisis de situaciones de crecimiento y de decrecimiento exponencial.
- Investigación de regularidades y propiedades de operaciones con potencias a partir de la resolución de problemas.

Números decimales y fracciones

- Resolución de situaciones problemas en las que sea necesario y pertinente expresar como fracciones números decimales finitos e infinitos periódicos.
- Aproximaciones convenientes para números decimales infinitos.
- Uso de la calculadora para investigar y establecer patrones en familias de números decimales.

Proporcionalidad

- Elaboración de tablas y gráficos correspondientes a situaciones de variación proporcional directa e inversa.
- Caracterización de situaciones de proporcionalidad inversa y directa mediante un producto constante y un cuociente constante, respectivamente.
- Resolución de problemas geométricos de proporcionalidad (producir figuras semejantes).
- Realización e interpretación de planos de tipo esquemáticos a escala.
- Cálculo de porcentajes y elaboración y análisis de tablas de aumentos y descuentos en un porcentaje dado, utilizando calculadora.

- identificar lados, vértices y ángulos en figuras poligonales;
- distinguir tipos de ángulos, con referencia al ángulo recto.

Perímetro y área

- utilizar centímetros para medir longitudes, y cuadriculados y centímetros cuadrados, para medir superficies;
- calcular perímetros y áreas en cuadrados, rectángulos y triángulos rectángulos, y en figuras que puedan descomponerse en las anteriores;
- reconocer las fórmulas para el cálculo del perímetro y del área del cuadrado, rectángulo y triángulo rectángulo, como un recurso para abreviar el proceso de cálculo;
- distinguir perímetro y área, a partir de transformaciones de una figura en la que una de estas medidas permanece constante.

- Ampliación y reducción de cuadrados y rectángulos en papel cuadriculado, expresando como razones las variaciones de los lados, el perímetro y el área.
- Análisis del perímetro y el área de familias de cuadrados y rectángulos, generadas a partir de la variación de sus lados.

Tratamiento de la información

Recopilación y análisis de información: comparación de datos, promedio y valor más frecuente.

Tratamiento de información

- Presentación de información en tablas de frecuencias relativas y construcción de gráficos circulares.
- Análisis de información: utilizando como indicador de dispersión el recorrido de la variable, y como medidas de tendencia central, la moda, la media y la mediana.

Figuras y cuerpos geométricos

- Investigación sobre la suma de los ángulos interiores de polígonos y el número de lados de éstos; construcción de polígonos por combinación de otros.
- Investigación de las relaciones entre los ángulos que se forman al intersectar dos rectas por una tercera. Resolución de problemas.
- Análisis de los elementos de una circunferencia (radio, diámetro) en la reproducción y creación de circunferencias con regla y compás.
- Construcciones de redes para armar cilindros y conos.

Perímetro, área y volumen

- Experimentación de diversos procedimientos (gráficos y concretos) para medir el perímetro y el área de circunferencias.
- Interpretación y uso de fórmulas para el cálculo de perímetro y área de circunferencias y de polígonos.
- Estimación y cálculo del volumen de cuerpos geométricos regulares expresándolos en las unidades pertinentes.
- Relaciones de equivalencia entre unidades de volumen de uso corriente.
- Interpretación y uso de fórmulas para el cálculo del volumen de cilindros, conos y prismas rectos.

Tratamiento de información

- Análisis de tablas y gráficos estadísticos habitualmente utilizados en la prensa.
- Lectura y análisis de resultados de encuestas de opinión.

“...*haz capaz a tu escuela de todo lo grande*
que pasa o ha pasado por el mundo.”

Gabriela Mistral

EDUCACION
Nuestra
Riqueza
GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACION

www.mineduc.cl

Educación Matemática Séptimo Año Básico